PLANE TRIGONOMETRY.

FOR THE USE OF COLLEGES AND SCHOOLS

 WITH NUMEROUS EXAMPLES,

BY

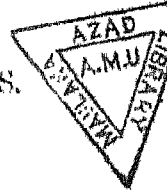
I. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDU,

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKA UL LAH,

HEAD MASTER NORMAL SCHOOL, DEHLI,

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR.

رساله علم مثلث مستوي

مدرسوں اور مکتبوں کے لیئے معه بہت سي مثالوں کے

مولفه

ٹاڈھنٹر صاحب. ام. اے. اف. آر. ایس.

جسکو

منشي محمد ذکاءالله صاحب هيڈ ماسٹر نارمل اسکول دهلي

نے

بتائيد مقاصد

سائنٹيفک سوسيٹي عليگڈه اور سائنٹيفک سوسيٹي صوبه بہار

اردو ميں ترجمه کيا

اور

بمقام دهلي مطبع مرتضوي ميں باهتمام حاجي محمد عزيز الدين

کے مطبوع هوا

سنه ۱۸۷۱ ع

بسم اللہ الرحمن الرحیم

دیباچہ علم مثلث مستوی کا

اس کتاب مین وہ جملہ مسائل موجود ہین جو اکثر علم مثلث مستوی کی کتابون مین ہوتی ہین اور چھہ سو مثالین مشق کے واسطے لکھی ہین حتی الامکان مبتدیون کے سمجھانے کے واسطے مضامین کے صاف صاف بیان کرنیمین سعی اور کوشش کی گئی ہے اور سب مضامین اس علم کے وہ بیان کئے گئے ہین جنکا کام اور ریاضات مین پڑتا ہی اس کتاب کے بہت سی باب ہین اور ہر باب بنفسہ تام اور کمال ہے معلمونکو اختیار ہی کہ وہ ہر باب کا جتنا حصہ چاہین اول طالب علمون کو سکھائین ہر باب کے آخر مین مثالین لکھی ہوئی ہین مثالی متفرقہ کی چند مثالین طالب علم اول حل کرلے اور باقی کے حل کرنیمین وقفہ کرے جب تک اوسکو وقوف اس علم مین پیدا نہو

جناب ٹوڈہنٹر صاحب کی اصل کتاب اور اوسکی مثالون کا امتحان تعلیم کے واسطے مدت سے ہو رہا ہے اور تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ علم مثلث مستوی کا صحیح صحیح علم جو اوسکی ساری جزئیات پر حاوی ہو اس کتاب سے حاصل ہو سکتا ہی اور سوالات کے حل کرنیمین اوس علم کو عمل مین طالب علم لا سکتا ہے، بہت تھوڑی کتابین ہین جو اس کتاب سے مساوات کا درجہ رکھتی ہون — جو کوئی غلطی ترجمہ کی مجھکو بتلائیگا مین اوسکا ممنون ہونگا فقط محمد ذکاء اللہ ہیڈ ماسٹر نورمل سکول دہلی

فہرست مضامین

علم مثلث مستوی

باب اول

زاویون کی پیمائش انگریزی اور فرانسیسی درجون مین

(۱) لفظ ٹرگنومٹری جسکا ترجمہ ہم علم مثلث کرتے ہین دو یونانی لفظون سے مرکب ہے ایک لفظ کے معنی ہین مثلث کے اور دوسرے لفظ کے معنی ہین مین پیمائش کرتا ہون دراصل یہہ نام اوسی علم کا تھا جسمین کہ مثلثون کے ضلعے اور زاویون کے باہمی ارتباطات و تعلقات کی تحقیقات ہوتی تھی اور اوسکے دو نام تھے اگر سطح مستوی پر مثلث بنایا جاتا تو اوسکو علم مثلث مستوی کہتے اور اگر سطح کروی پر مثلث بنایا جاتا تو اوسکو علم مثلث کروی مگر اب معنی علم مثلث مستوی کے وسیع ہوگئے ہین اور اوسمین وہ ساری تحقیقات جبریہ داخل ہے جو مستوی زاویون کے باب مین کیجاتی خواہ ان زاویون سے مثلث بنے یا نبنے

(۲) اب ہم اول یہہ بیان کرتے ہین کہ زاویون کا اندازہ کسطرح ہوتا ہے اقلیدس مین زاویہ مستوی مستقیمۃ الخطین کی یہہ تعریف کی گئی ہے کہ دو خط مستقیم باہم ملین مگر ملکر ایک ایک خط مستقیم نہ ہوجائین تو اونمین سے ایک خط مستقیم کو جو میلان دوسرے خط مستقیم کے ساتھہ ہوتا ہے اوسے زاویہ مستوی مستقیمۃ الخطین کہتے ہین اور جب ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر قائم ہوکر برابر زاویے پہلوئن مین پیدا کرتا ہے تو ہر ایک زاویہ کو قائمہ کہتے ہین اب زاویہ قائمہ کو ۹۰ برابر حصون مین تقسیم کیا ہے اور اس حصہ کا نام درجہ رکہا ہے اور پہر اس درجہ کو ۶۰ برابر حصون مین تقسیم کیا ہے اور ایک حصہ کا نام دقیقہ رکہا ہے اور پہر دقیقہ کو ۶۰ برابر حصون مین تقسیم کیا ہے اور ایک حصہ کا نام ثانیہ

رکھا ہے پس اسطرح زاویہ میں درجوں کی تعداد کے دریافت ہونے سے زاویہ کا اندازہ ہو جاتا ہے اگر زاویہ میں پوری تعداد درجوں کی نہو تو اوسکو درجوں اور درجوں کی کسروں میں بیان کرتے ہیں اور پہر درجہ کی کسر کی تحویل دقیقوں اور ثانیوں میں کرتے ہیں

(۳) مثلاً نصف زاویہ قائمہ میں ۴۵ درجے ہونگے اور ربع قائمہ میں ۲۲½ درجے ہیں اور اسکو اعشاریہ میں ۲۲٫۵ درجے لکھہ سکتے ہیں اور اوسکو ۲۲ درجے ۳۰ دقیقہ کہہ سکتے ہیں اور علی ہذا القیاس اگر زاویہ قائمہ کو ۱۶ برابر حصوں میں تقسیم کریں تو ہر ایک حصہ میں ۵⅝ درجے یعنی ۵ درجے ۳۷ دقیقے ۳۰ ثانیے ہونگے

(۴) الفاظ درجہ اور دقیقہ اور ثانیہ کے واسطے انحصاراً یہہ رموز ° ′ ″ مقرر کیئں ہیں

۵° ۳۷′ ۳۰″ سے ۵ درجے اور ۳۷ دقیقے اور ۳۰ ثانیے سمجھے جاتے ہیں

(۵) جملہ عملیات میں درجوں اور دقیقوں اور ثانیوں میں زاویوں کے اندازہ کرنے کا طریقہ اختیار کیا گیا ہے مگر ملک فرانس میں جس زمانہ کے اندر اوزان اور پیمانوں میں نظم عشری مروج ہوا تو اوسوقت ان زاویوں کے اندازہ کرنیکے واسطے بھی یہہ طریقہ اختیار کیا گیا کہ زاویہ قائمہ کو ۱۰۰ برابر حصوں میں تقسیم کیا اور ایک حصہ کا نام گریڈ رکھا اور ہم اس گریڈ کا ترجمہ فرانسیسی درجہ کرتے ہیں اور پہر اس درجے کو بھی ۱۰۰ برابر حصوں میں تقسیم کیا اور ایک حصہ کا نام دقیقہ رکھا اور پہر اس دقیقہ کے ۱۰۰ برابر حصے کئے اور ایک حصہ کا نام ثانیہ رکھا اس تقسیم کا نام سو سو کی تقسیم ہے اس سبب سے کہ ہر دفعہ سو برابر حصوں میں تقسیم ہوتی ہے اور پہلی تقسیم کا نام ساٹھہ ساٹھہ کی تقسیم ہے اس سبب سے کہ ہر دفعہ ساٹھہ برابر حصوں میں تقسیم ہوتی ہے اور سو سو کی تقسیم کو فرانسیسی ترکیب تقسیم اور ساٹھہ ساٹھہ کی تقسیم کو انگریزی ترکیب تقسیم بھی کہتے ہیں

(۶) اور فرانسیسی درجے اور دقیقے اور ثانیے کے واسطے انحصاراً یہہ رموز

ف و ۱ و ۱۱ سے ظاہر کیگئی ہین مثلاً ۵ ف ۳ ۳ ۲ۜ ۳۰ ۵ فرانسیسی درجے ۳۲ دقیقے ۲۷ ثانئے سوسو کی تقسیم مین ادہین سو کی تقسیم مین دقیقے اور ثانئے وہ نہین جو ساٹھ ساٹھ کی تقسیم مین ہوتے ہین اسلئے تمیز کے واسطے فرانسیسی دقیقے اور ثانیون پر ہندسون کے اول کھڑے زیرین لگاتی ہین

(۷) سوسو کی تقسیم مین اعداد دقیقے اور ثانیون کے فوراً کسور اعشاریہ مین فرانسیسی درجے کے تعبیر ہوسکتے ہین مثلاً ۲۷ ۳ دقیقے $\frac{۳۲۷}{۱۰۰}$ فرانسیسی درجے یعنی ۳۲۷ء فرانسیسی درجے اور ۳۰ ثانئے $\frac{۳۰}{(۱۰۰)^۲}$ دقیقے کے یعنی ۳۰۰۰ء فرانسیسی درجہ کے ہین پس اسسے معلوم ہوا کہ ۵ ف ۳۲ ۳۰ اسطرح لکہے جائینگے کہ ۳۲۷۳ء ۵ ف اور چونکہ فرانسیسی درجہ $\frac{۱}{۱۰۰}$ وان حصہ زاویہ قائمہ کا ہوتاہے تو ۳۲۷۳ء ۵ ف کو ۰۵۳۲۷۳ء ایک قائمہ کا کہہ سکتے ہین باوجودیکہ اس سوسو کی تقسیم مین یہہ بڑا فایدہ ہی لیکن عملیات مین ساٹھہ ساٹھہ کی تقسیم مروج ہے اور وجہ اسکی یہہ ہے کہ موافق اس تقسیم مروج کے ایک زمانہ دراز سے کتب ریاضیہ مین سیکڑون حساب لکہے گئے اور ہزارہا جدولین مرتب ہوئین اگر اس تقسیم ثانی کو کام مین لائین تو ان سب کتابون کو ردی بنائین اور زاویون کا نئی طرح سے اندازہ کرنمین ناحق مشقت شاقہ اٹہائین اور تحویل کرتے کرتے تہک جائین

(۸) اب ہم یہہ بتلاتے ہین کہ انگریزی اور فرانسیسی ترکیب کے موافق جو ایک ہی زاویہ کو اعداد تعبیر کرین اونکا آپسمین مقابلہ کسطرح ہوتاہے

فرض کرو کہ ایک زاویہ مین انگریزی درجون کی تعداد کو د اور فرانسیسی درجون کی تعداد کو ف تعبیر کرتاہے تو اس سبب سے کہ زاویہ قائمہ مین ۹۰ درجے ہوتے ہین $\frac{د}{۹۰}$ زاویہ معلوم اور قائمہ کی نسبت کو تعبیر کریگا اور اس وجہ سے کہ زاویہ قائمہ مین ۱۰۰ فرانسیسی درجے ہوتے ہین $\frac{ف}{۱۰۰}$ زاویہ معلوم اور قائمہ کی نسبت کو تعبیر کریگا

اسسے معلوم ہوا کہ $\frac{د}{۹۰} = \frac{ف}{۱۰۰}$

اسیواسطے $د = \frac{۹ف}{۱۰} = \frac{۹}{۱۰}ف = ف + \frac{۱}{۱۰}ف$

اور $ف = \frac{۱۰د}{۹} = \frac{۱۰}{۹}د = د + \frac{۱}{۹}د$

پس صورت جبریہ د = ف − $\frac{1}{10}$ ف سے یہہ قاعدہ مستنبط ہوتا ہے کہ زاویہ مین
جسقدر فرانسیسی درجے ہون اونمین سے دسوان حصہ اونکا تفریق کرو پس باقی جو حاصل
ہوگی وہ تعداد انگریزی درجون کی اوس زاویہ مین ہوگی اور صورت جبریہ ف = د + $\frac{1}{9}$ د سے
یہہ قاعدہ استخراج ہوتا ہے کہ کسی زاویہ مین جو تعداد انگریزی درجون کی ہو اوسپر ایک نوان
حصہ اوسکا زیادہ کرو تو تعداد فرانسیسی درجون کی اوس زاویہ مین حاصل ہوگی

(۹) اب یہہ فرض کرو کہ م تعداد انگریزی دقیقون کی اور فر فرانسیسی دقیقون کی کسی
ایک زاویہ مین ہو تو اس سبب سے کہ قائمہ مین ۹۰ × ۶۰ انگریزی دقیقے ہوتی ہین
$\frac{\text{م}}{۹۰\times۶۰}$ زاویہ معلوم اور قائمہ کی نسبت کو تعبیر کرتا ہے اور اس سبب سے کہ
۱۰۰ × ۱۰۰ فرانسیسی دقیقے قائمہ مین ہوتے ہین $\frac{\text{فر}}{۱۰۰\times۱۰۰}$ زاویہ معلوم اور قائمہ کی
نسبت کو تعبیر کرتا ہے اسلیئے

$$\frac{\text{م}}{۶۰\times۹۰} = \frac{\text{فر}}{۱۰۰\times۱۰۰}$$

اسیواسطے $\text{م} = \frac{۶\times۹}{۱۰\times۱۰}\,\text{فر} = \frac{۲۷}{۵۰}\,\text{فر}$

اور $\text{فر} = \frac{۵۰}{۲۷}\,\text{م}$

اور علی ہذا القیاس اگر ص تعداد انگریزی کے ثانیون اور مر فرانسیسی ثانیون کی
ایک زاویہ مین ہو تو

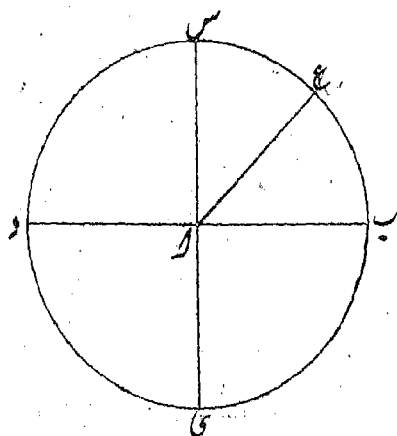
$$\frac{\text{ص}}{۶۰\times۶۰\times۹۰} = \frac{\text{مر}}{۱۰۰\times۱۰۰\times۱۰۰}$$

اسیواسطے $\text{ص} = \frac{۸۱}{۲۵۰}\,\text{مر}$

$$\text{مر} = \frac{۲۵۰}{۸۱}\,\text{ص}$$

(۱۰) اقلیدس مین اکثر زاویہ دو قائمون سے کم ہوتا ہے یہہ اکثر کی قید اسلیئے
لگائی گئی ہے کہ کہین کہین اقلیدس مین دو قائمون سے بڑے زاویہ کا بھی ذکر آجاتا ہے
اوس شکل کو دیکھو جسمین یہہ لکھا ہے کہ برابر دائرون مین زاویئے خواہ مرکزی ہون

خواہ محیطی مناسب اُسکے قوسون کے ہوتے ہین اب یہان قوس کے مقدار کے واسطے کوئی حد معین نہین ہے اسلئے زاویہ کی مقدار کے واسطے بھی کوئی حد مقرر نہین ہے اور جو اقلیدس نے ثبوت لکھا ہے اوسمین لکھا ہے کہ خواہ کچھہ ہی اضعاف زاویہ معلوم کی لو اسلئے یہہ اضعاف جتنی ہم چاہین بڑی ہوسکتی ہین

(۱۱) ایک دستور ہے کہ علم مثلث کی کتابون مین یہہ لکھا کرتے ہین کہ زاویون کے مقدار کے واسطے کسی حد کی قید نہین

فرض کرو کہ ب ا د ایک خط مستقیم ہے اور ایک دوسرا خط س ا ی پہلے خط پر زاویے قائمے بناتا ہے اور مقام اب سے ایک خط اع گرد انجام ا کے چکر لگائے تو جب اع منطبق سمت اس پر ہوگا تو زاویہ قائمہ مرتسم کریگا اور جب اع سمت اد پر منطبق ہوگا تو زاویہ دو قائمے پیدا کریگا اور جب اع سمت ای پر منطبق ہوگا تو زاویہ تین قائمے پیدا کریگا اور جب اع منطبق سمت اب پر ہوگا تو زاویہ چار قائمے مرتسم کریگا اور جب اع دوسرا چکر شروع کریگا تو چار قائمون سے بڑا زاویہ بنائیگا پس اگر اع اول چکر مین عین وسط مین اب اور اس کے واقع ہوگا تو زاویہ اب اور اع کے درمیان نصف قائمہ ہوگا اور اگر اع دوسرے چکر مین عین وسط مین اب اور اس کے واقع ہوگا تو زاویہ ساڑھے چار

قائمون کے برابر ہوگا اور تیسرے چکر مین زاویہ ساڑھے آٹھہ قائمون کے برابر ہوگا اور علی ہذا القیاس

(١٢) خطوط مستقیم س ا ی اور ب ا د متقاطع ہوکر چار قائمے پیدا کرتے ہین ب ا س کو ربعہ اول اور س ا د کو ربعہ دوم اور د ا ی کو ربعہ سوم اور ی ا ب کو ربعہ چہارم کہتے ہین اب ساکن خط ا ب اور متحرک خط ا ع کے درمیان کوئی زاویہ فرض کرو اوسکو اسطرح بیان کرینگے کہ اگر ا ع ربعہ اول مین واقع ہے تو زاویہ ب ا ع کو ربعہ اول مین کہینگے اور اگر ا ع دوسرے ربعہ مین واقع ہو تو زاویہ کو دوسرے ربعہ مین کہینگے اور علی ہذا القیاس

مثالین

(١) دو زاویون کا تفاوت ١٠ فرانسیسی درجے اور حاصل جمع ٤٥ انگریزی درجے ہین اون زاویونکو دریافت کرو

(٢) قائمہ کی دو تہائی کو ایسے دو حصونمین تقسیم کرو کہ ایک حصہ کے انگریزی درجونکی تعداد کو دوسرے حصہ کی فرانسیسی درجونکی تعداد سے نسبت ٣ اور ١٠ کی ہو

(٣) نصف قائمہ کو ایسے دو حصونمین تقسیم کرو کہ ایک حصہ کی انگریزی درجون کی تعداد کو دوسرے حصہ کی فرانسیسی درجونکی تعداد سے نسبت ٩ اور ٥ کی ہو

(٤) ١ ٥/٦ کو درجے کے اعشاریہ مین بیان کرو

(٥) ایک زاویہ مین ن درجے ہین اوسکو ایسے دو حصون مین تقسیم کرو کہ ایک حصہ مین انگریزی دقیقے اوتنے ہی ہون جتنے کہ دوسرے حصہ مین فرانسیسی دقیقے

(٦) اگر زاویہ قائمہ کی ایک تہائی کو زاویونکے ناپنے کا پیمانہ واحد مقرر کرین تو ٥ ٧° کو کونسا عدد تعبیر کریگا

(٧) جب زاویہ ٦٦ ٢/٣ فرانسیسی درجہ کا ٢٠ سے تعبیر ہو تو زاویون کے ناپنے کی پیمانہ واحد مین تعداد درجونکی دریافت کرو

(٨) دو منتظم الاضلاع کی تعداد اضلاع مین نسبت ٣ اور ٤ کی ہے اور ایک شکل کے ایک زاویہ

مین تعداد فرانسیسی درجون کی برابر دوسری شکل کے ایک زاویہ کے انگریزی درجون کی ہے
اون زاویونکو دریافت کرو

(۹) ثابت کرو کہ اگر زاویہ تقسیم فرانسیسی کے موافق ثانیون مین تعبیر کیا جاے اگر اوسکو
۳۲۴ ۰ مین ضرب دین تو تحویل اوسکی انگریزی ثانیون کی طرف ہوجایگی

(۱۰) اگر ایک زاویہ مین تعداد فرانسیسی دقیقون کی وہی ہو جو دوسرے زاویہ مین انگریزی دقیقون کی ہے
تو اون زاویونکا مقابلہ باہم کرو

باب دوم مقیاس قوسی زاویہ کا

(۱۳) ہم نے اوپر دو ترکیبین زاویون کے اندازہ کرنیکی بتلائین ایک انگریزی ترکیب درجے دقیقون ثانیون
سے دوسرے فرانسیسی ترکیب درجے دقیقون ثانیون سے اور یہہ بہی ہم نے لکہا کہ پہلی
ترکیب عملیات کے حساب مین زیادہ ترمروج ہے لیکن ایک اور ترکیب نظریات ریاضیہ مین
بڑی بکار آمد ہے اب ہم اوسکا بیان کرتے ہین اس باب کا مطلب اعظم یہہ ہے کہ اول اس دعوی کو
ثابت کرین اور پہر اوسکو استعمال مین لائین کہ اگر دو خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع کو مرکز تعبیر
کرکے کسی نصف قطر سے دائرہ کہینچین تو زاویہ درمیانی خطوط مستقیم کا اوس نسبت سے اندازہ
ہوگا جو اوسکے محاذی قوس نصف قطر دائرہ سے رکہتی ہے قبل اثبات دعوی کے بعض مقدمات
کا ثابت کرنا لابد اور ضروری ہے اونکو اول لکہتے ہین اور بعض اوقات مبتدی دفعہ ۱۴ کے مقدمہ
کو تسلیم کرلیتے ہین اور اوسکے اثبات پر نظر کرتے ہین اور اسطرح اپنا کام چلاتے ہین

(۱۴) محیط دوائر کے ایسے متغیر ہوتے ہین جیسے کہ نصف قطر

فرض کرو کہ ایک دائرہ کا نصف قطر نق اور محیط قط ہے اور دوسرے دائرہ کا نصف قطر نقَ
اور محیط قطَ ہے ہر دائرہ مین منتظم الاضلاع ن اضلاع کی بناؤ اور ہر دائرہ مین دو خطوط
مرکز سے ایک ضلع کے اطراف مین ملاؤ پس دو مثلث متشابہ حاصل ہونگے اور فرض کرو کہ
ع ایک کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع اور عَ دوسرے کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع ہے

مقیاس قوسی زاویہ کا

دوم

مثلثوں کے متشابہ ہونے سے اول کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کو دوسری کثیر الاضلاع کے ایک ضلع سے وہ نسبت ہوگی جو اول دائرہ کے نصف قطر کو ہے دوسرے دائرہ کے نصف قطر سے

اسیواسطے $\frac{ع}{عَ} = \frac{نق}{نقَ}$

اب فرض کرو کہ ع = قط ـ لد اور عَ = قطَ ـ لدَ پس

نقَ (قط ـ لد) = نق (قطَ ـ لدَ)

اسیواسطے نقَ قط ـ نق قطَ = نقَ لد ـ نق لدَ

اب ہم یہہ فرض کرتے ہیں کہ ن کو بڑہانے سے مجموعہ اضلاع کثیر الاضلاع کو اسقدر زیادہ کر سکتے ہیں کہ اوسمیں اور محیط دائرہ میں فرق جتنا چھوٹے سے چھوٹا ہم چاہیں رہ جاے پس لد اور لدَ ہیں سے ہر ایک کو جتنا چھوٹا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں اسواسطے نقَ لد ـ نق لدَ کو چھوٹا جتنا چاہیں کر سکتے ہیں اسسے معلوم ہوا کہ نقَ قط ـ نق قطَ کو صفر ٹہرا سکتے ہیں اسواسطے کہ اگر اوسکی کچھہ بھی قیمت ہو مثلاً ط تو نقَ لد ـ نق لدَ چھوٹا ط سے نہیں ہو سکتا اور یہہ خلاف اوس فرض کے ہے کہ نقَ لد ـ نق لدَ کو جتنا چھوٹا چاہیں کر سکتے ہیں پس

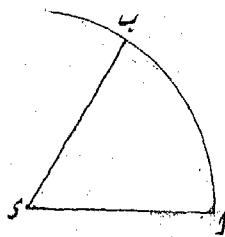
نقَ قط ـ نق قطَ = ۰

اسیواسطے $\frac{قط}{نق} = \frac{قطَ}{نقَ}$

(۱۵) پس ثابت ہوا کہ نسبت محیط اور نصف قطر کی نسبت معین اور مستقل ہوتی ہے خواہ دائرہ کی کچھہ ہی مقدار ہو اور اسیواسطے نسبت محیط اور قطر کی بھی معین اور مستقل ہوتی ہے نسبت محیط اور قطر کی اعداد میں ٹہیک ٹہیک نہیں تعبیر ہو سکتی مگر ہم آیندہ اس بات کو ثابت کرینگے کہ اس نسبت کا حساب تقریباً جہانتک چاہیں ہو سکتا ہے قیمت نسبت کی تقریباً برابر $\frac{۲۲}{۷}$ کے ہے اور اسسے بھی زیادہ قریب تر $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ اور اسکی قیمت آٹہہ مرتبہ کی اعشاریہ تک صحیح صحیح ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵ ہے اس عدد کے واسطے رمز کہ مقرر کی ہے اور اسسے ہمیشہ دائرہ کے محیط اور قطر کی نسبت تعبیر ہوتی ہے پس اگر دائرہ کے نصف قطر کو نق تعبیر کرے تو محیط

۲ کہ نق تعبیر کریگا اسمین

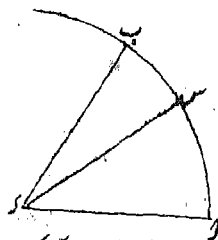
کہ = ۳٫۱۴۱۵۹

(۱۶) ہر دائرہ مین زاویہ مرکزی جو اوس قوس کے سامنے واقع ہو جسکا طول برابر نصف قطر کے ہمیشہ ایک ہی مقدار رکھتا ہے

د کے مرکز اور د ا کے نصف قطر پر دائرہ کہنچو اور اب قوس اس دائرہ کی برابر طول مین نصف قطر کے بناؤ تو اس سبب سے کہ زاویے دائرہ کے مرکز پر متناسب اپنے قوسون کے ہوتے ہین

زاویہ ا د ب / ۴ قائمے = قوس ا ب / محیط دائرہ = نق / ۲ کہ نق = ۱ / ۲ کہ

اسواسطے زاویہ ا د ب = ۴ قائمے / ۲ کہ

پس زاویہ ا د ب ایک خاص کسر چار قائمون کی ہے اور وہ مستقل اور معین ہے خواہ نصف قطر دائرہ کا کچھہ ہی ہو

(۱۷) چونکہ زاویہ دائرہ کے مرکز پر محاذی قوس کے جو نصف قطر کے برابر ہے ہمیشہ غیر متغیر ہوتا ہے اسلئے اوسکو پیمانہ واحد مقرر کرتے ہین اور پہر اس زاویہ کی نسبت سے اور زاویون کا اندازہ بتلاتے ہین

فرض کرو کہ ا د س کوئی زاویہ ہو د کو مرکز مانکر کسی نصف قطر د ا پر ایک دائرہ کہنچو اور قوس ا ب کو طول مین برابر نصف قطر کے بناؤ فرض کرو کہ نصف قطر کو نق سے

اور طول قوس اس کو ط سے تعبیر کرین

اب چونکہ دائرہ کے مرکزی زاویے متناسب اپنے قوسون کے ہوتے ہین

زاویہ ا د س / زاویہ ا د ب = ا س / ا ب = ط / ق

اسواسطے زاویہ ا د س = ط / ق × زاویہ ا د ب

اور اب یہہ نتیجہ صحیح ہے خواہ زاویون کے ناپنے کے واسطے کوئی پیمانہ واحد مقرر ہو مگر دونو زاویونکے واسطے ایک ہی پیمانہ ہو اگر زاویہ ا د ب کو خود ہی پیمانہ واحد مقرر کرین تو یہہ زاویہ واحد سے تعبیر ہوگا اور

زاویہ ا د س = ط / ق

(۱۸) پس ہم نے ثابت کردیا کہ ہریک زاویہ کا اندازہ اوس کسر سے ہوتا ہے جسکا شمار کنندہ تو اوسکے سامنے کے قوس ہے اور اوسکا نسب نما نصف قطر اوس دائرہ کا ہی اور یہہ قوس اور نصف قطر اوس زاویہ کو خواہ کسی دائرہ کے مرکز پر بنانے سے پیدا ہون

اور اس طریقہ سے اندازہ کرنے مین پیمانہ واحد یعنی جو زاویہ اسے تعبیر ہوتا ہے اوسکے سامنے کے قوس برابر نصف قطر کے ہوتی ہے اور ہمنے ثابت کردیا ہے کہ یہہ زاویہ برابر ۲/ط قائمہ کے ہوتا ہی اسواسطے تعداد درجون کی اس زاویہ مین ۹۰ / ۲/ط ہے یعنی ۱۸۰/ط اگر ہم قیمت تقریبی مندرجہ دفعہ ۱۵ کی کام مین لائین تو

۱۸۰/ط = ۵۷۰۲۹۵۷۷۹۵۱ پس یہہ تعداد درجونکی اوس زاویہ مین ہے جو محاذی اوس قوس کے واقع ہو کہ برابر نصف قطر کے ہو

(۱۹) بس یہہ کسر جو قوس تقسیم کی گئی نصف قطر سے ہے اوس سے زاویہ کی مقدار کا تصور ذہن مین دو طریقون سے پیدا ہوتا ہی مثلاً فرض کرو کہ ایک زاویہ کو ۳/۴ کہین تو ایک طریقہ یہہ ہے کہ ہم مقیاس قوسی کے پیمانہ واحد کی طرف رجوع کرین

اوسمین کے ۵ درجے ہوتے ہین پس اس پیمانہ کی $\frac{1}{2}$ لے لین دوسرا طریقہ یہہ ہے کہ ہم پیمانہ واحد کا کچھہ خیال نہ کرین بلکہ یون تصور کرین کہ زاویہ ایسا ہی کہ اوسکے سامنے کی قوس دو تہائی نصف قطر کی ہے

(۲۰) اس کسر کو (کہ قوس تقسیم کی گئی نصف قطر پر) مقیاس قوسی کہتے ہین اور ایہی ہمنے بیان کیا ہے کہ یہہ ترکیب زاویون کے اندازہ کرنیکی نظریات ریاضیہ مین کام آتی ہی اسلئے اسکو ترکیب نظری بہی کہتے ہین

(۲۱) اگر دائرہ کے نصف قطر کو ق سے تعبیر کرین تو محیط دائرہ ۲ کہ ق ہوگا اسّے معلوم ہوا کہ مقیاس قوسی چار قائمون کا $\frac{\text{۲ کہ ق}}{\text{ق}}$ یعنی ۲ کہ ہے

پس مقیاس قوسی دو قائمون کا کہ ہے اور مقیاس قوسی ایک قائمہ کا $\frac{\text{کہ}}{\text{۲}}$ ہی اور مقیاس قوسی ن قائمون کا $\frac{\text{ن کہ}}{\text{۲}}$ ہے جسمین ن صحیح یا کسر ہے

(۲۲) اب ہم یہہ بتلائینگے کہ مقیاس قوسی کسی زاویہ کا کس طرح اوسی زاویہ کے درجون سے مربوط ہوتا ہی فرض کرو کہ زاویہ معلوم مین تعداد درجون کی لد ہے اور اوسے زاویہ کا مقیاس قوسی بر ہے چونکہ دو قائمے زاویون مین ۱۸۰° ہوتے ہین تو زاویہ معلوم اور دو قائمون کی نسبت $\frac{\text{لد}}{\text{۱۸۰}}$ سے تعبیر ہوتی ہے اور چونکہ مقیاس قوسی دو قائمون کا کہ ہے تو زاویہ معلوم اور دو قائمون کی نسبت کو $\frac{\text{بر}}{\text{کہ}}$ تعبیر کریگا پس اسسے معلوم ہوا کہ

$$\frac{\text{لد}}{\text{۱۸۰}} = \frac{\text{بر}}{\text{کہ}}$$

$$\text{پس لد} = \frac{\text{۱۸۰ بر}}{\text{کہ}}$$

$$\text{اور بر} = \frac{\text{کہ لد}}{\text{۱۸۰}}$$

(۲۳) مثال مقیاس قوسی ایک درجہ کا $\frac{\text{کہ}}{\text{۱۸۰}}$ ہے اور ۱۰ درجہ کا مقیاس قوسی $\frac{\text{۱۰ کہ}}{\text{۱۸۰}}$ اور مقیاس قوسی نصف قائمہ کا $\frac{\text{کہ}}{\text{۱۸۰}} \times \text{۴۵}$ ہی اور مقیاس قوسی ایک دقیقہ کا $\frac{\text{کہ}}{\text{۱۸۰} \times \text{۶۰}}$ اور مقیاس قوسی ایک ثانیہ کا $\frac{\text{کہ}}{\text{۱۸۰} \times \text{۶۰} \times \text{۶۰}}$ اور علی ہذا القیاس

اب اگر مقیاس قوسی کسی زاویہ کا $\frac{۳}{۴}$ ہے تو تعداد درجون کی اوس زاویہ مین $\frac{۳}{۴}$. $\frac{۱۸۰}{ک}$ یعنی ۹۵ء ۷۷ء ۵۰ء ۲۹۵ وغیرہ کی $\frac{۳}{۴}$ ہوگی اگر مقیاس قوسی کسی زاویہ کا ۱۰ ہے تو تعداد درجونکی اوس زاویہ مین ۱۰ × $\frac{۱۸۰}{ک}$ یعنی

۱۰ × ۹۵ء ۷۷ء ۹۵ء ۲۹۵ء ۵۰ ہے اور علیٰ ہذا القیاس

طالب علم کو خوب توجہ ان باتون پر کرنی چاہئیے اور اوسکو ایسی مشق اور عادت ڈالنی چاہئیے کہ مقیاس قوسی مین جو زاویہ بیان کیا جائے اوسکو فوراً درجون مین تحویل کرلے

(۴۴) اب اس مقیاس قوسی اور فرانسیسی درجون کی مربوط کرنیکی ترکیب بتلاتے ہین

فرض کرو کہ د تعداد فرانسیسی درجونکی زاویہ معلوم مین ہو اور بر مقیاس قوسی اوسی زاویہ کا ہو تو نسبت زاویہ معلوم اور دو قائمون کی $\frac{د}{۲۰۰}$ اور نیز $\frac{بر}{ک}$ سے تعبیر ہوگی

اسے معلوم ہوا کہ $\frac{د}{۲۰۰} = \frac{بر}{ک}$

$د = \frac{۲۰۰ . بر}{ک}$

اور $بر = \frac{ک . د}{۲۰۰}$

پس تعداد فرانسیسی درجون کی مقیاس قوسی کے پیمانہ واحد مین

$\frac{۲۰۰}{ک}$ یعنی ۷۷ء ۶۶ء ۱۹ء ۶۳ ہے

(۴۵) دفعہ ۱۷ مین ثابت کیا ہے

زاویہ ا د س = $\frac{ق}{ط}$ × زاویہ ا د ب

اب یہان کوئی اور بات پیمانہ واحد مقیاس قوسی کے لئے سوا اسکے نہین فرض کی کہ دونو زاویون کا پیمانہ واحد ایک ہی ہے

چونکہ زاویہ ا د ب غیر متغیر ہے اسلئے زاویہ ا د س اور قوس مین تبادل مستقیم اور اور زاویہ اور نصف قطر مین تبادل معکوس ہے اسیواسطے ہم کہا کرتے ہین کہ

زاویہ ا د س = $\frac{ک × قوس}{[illegible]}$

اسمین ک وہ مقدار ہے جو ادس کے ساتھہ تبدیل نہین ہوتی اور اوسکی قیمت موقوف مقیاس قوسی کے پیمانہ واحد پر ہوتی ہے اور یہہ ہم کو اختیار ہے کہ پیمانہ واحد جو چاہین مقرر کرین مثلاً فرض کرو کہ ہم نصف قائمہ کو پیمانہ واحد مقرر کرین تو ہمکو یہہ منظور ہوگا کہ ۱ دس برابر ایک کے ہو اور یہہ جب ہوگا کہ قوس برابر محیط کے آٹھوین حصہ کے ہو پس

$$۱ = \frac{\frac{۲\,\text{ک}\,\text{ق}}{۸} \times \text{ک}}{\text{ق}}$$

اسیواسطے ک = $\frac{۴}{\text{ک}}$

پس صورت قانونی

زاویہ ادس = $\frac{۴}{\text{ک}} \times \frac{\text{قوس}}{\text{نصف قطر}}$

اسکے زاویہ کی مقدار کا اندازہ صحیح اوس صورت مین ہوتا ہے کہ پیمانہ واحد نصف قائمہ رہے

مثالین

(۱) اگر کسی زاویہ مین د اور ف اور م تعداد درجون اور فرانسیسی اور مقیاس قوسی کے احاد کی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{د}}{۹۰} = \frac{\text{ف}}{۱۰۰} = \frac{۲\text{م}}{\text{ک}}$$

(۲) ایک دائرہ کا نصف قطر ۱۰ فیٹ ہے اور اوسکی ۹ انچ کی قوس کے محاذی مرکز پہ جو زاویہ ہوگا اوسمین تعداد درجون کی دریافت کرو

(۳) مقیاس قوسی ۶ کا دریافت کرو

(۴) تین زاویے ہین اول زاویہ کا مقیاس قوس دوسرے زاویہ کے مقیاس قوسی سے بقدر $\frac{\text{ک}}{۳}$ کے زیادہ ہے اور مجموعہ دوسرے اور تیسرے زاویہ کا ۲۰ فرانسیسی درجے ہے اور مجموعہ اول اور دوسرے زاویہ کا ۳۶ درجے ان تینون زاویون کو دریافت کرو

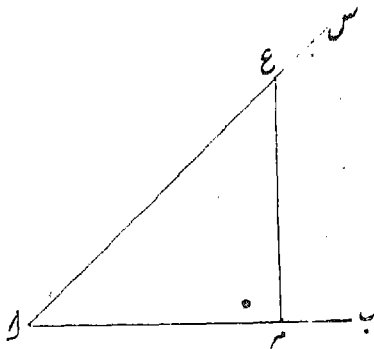
(۵) ایک قائمہ کی پانچ سولہوین حصے کو مقیاس قوسی مین اور درجون اور دقیقون کے اعشاریہ مین اور فرانسیسی درجون اور فرانسیسی درجون کی اعشاریہ مین تعبیر کرو

(۶) ایک مثلث کے زاوئے سلسلہ حسابیہ مین ہین اور سب سے بڑا زاویہ دوچند سب سے چھوٹے زاویہ سے ہے ان زاویون کے درجے اور فرانسیسی درجے اور مقیاس قوسی دریافت کرو

(۷) ایک مثلث کے زاوئے سلسلہ حسابیہ مین ہین اور سب سے چھوٹے زاویہ کے درجون کو سب سے بڑے زاویہ کے مقیاس قوسی کے ساتھ نسبت ۶۰ اور π کی ہے زاویون کو دریافت کرو

باب سوم

علم مثلثی نسبتین

(۲۶) فرض کرو کہ زاویہ ب ا س ہو اس زاویہ کے اضلاع مین سے کسی ضلع مین کوئی نقطہ مقرر کرو اور دوسرے ضلع پر اس سے عمود نکالو

مثلاً یہہ نقطہ ع کا ضلع ا س مین مقرر کرو اور ع م عمود ا ب پر نکالو اور زاویہ ب ا س کو حرف ا سے تعبیر کرو تو

$\frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}}$ یعنی $\frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$ کو جیب زاویہ ا کی کہتے ہین

$\frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}}$ یعنی $\frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$ کو جیب التمام زاویہ ا کی کہتے ہین

$\frac{\text{ع م}}{\text{ا م}}$ یعنی $\frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$ کو مماس زاویہ ا کا کہتے ہین

$\frac{\text{ا م}}{\text{ع م}}$ یعنی $\frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$ کو مماس التمام زاویہ ا کا کہتے ہین

$\frac{ا ع}{ا م}$ یعنی $\frac{وتر}{قاعدہ}$ کو قاطع الزاویہ زاویہ ا کا کہتے ہین

$\frac{ا ع}{ع م}$ یعنی $\frac{وتر}{عمود}$ کو قاطع التمام زاویہ ا کا کہتے ہین

اگر زاویہ ا کے جیب التمام کو ایک سے تفریق کرین تو حاصل تفریق کو جیب معکوس ا کی کہتے ہین اگر ایک ہین سے جیب ا کی تفریق کرین تو حاصلتفریق کو جیب معکوس التمام ا کی کہتے ہین جیب معکوس التمام کا استعمال عمل ہین شاذ و نادر ہوتا ہی

(۲۷) الفاظ جیب اور جیب التمام وغیرہما کا اختصار اکثر کیا جاتا ہی اور ان جملے و اسطرح لکھتے ہین کہ

$$جب\ ا = \frac{ع م}{ا ع}$$

$$جس\ ا = \frac{ع م}{ا م}$$

$$قط\ ا = \frac{ا ع}{ا م}$$

$$جم\ ا = \frac{ا م}{ا ع}$$

$$جم\ ا = \frac{ا م}{ع م}$$

$$قم\ ا = \frac{ا ع}{ع م}$$

$$جع\ ا = ۱ - جم\ ا$$

$$جعم\ ا = ۱ - جب\ ا$$

(۲۸) جیب اور جیب التمام اور مماس اور مماس التمام اور قاطع الزاویہ اور قاطع التمام او جیب معکوس اور جیب معکوس التمام کو علم مثلثی نسبتین یا علم مثلثی جملے کہتے ہین علم مثلث کا جزو اعظم یہی ہے کہ کسی زاویہ کی ان علم مثلثی نسبتون کی خواص اور باہمی ارتباطات کی تحقیقات کرین یہہ جملے مثلثی طول نہین ہین بلکہ نسبت ایک طول کی دوسرے طول کے ساتھ ہے یعنی وہ علم حساب کی اعداد صحیح یا مکسور ہین

(۲۹) زاویہ جسقدر قائمہ سے کم ہوتا ہے اوس کمی کو متمم زاویہ یا تمامی زاویہ کی کہتے ہین

پس اگر زاویہ مین ا تعداد درجونکی ہو تو ۹۰ - ا تعداد درجونکی اوس زاویہ کی تمامی مین ہونگی
اسلئے ایک اور ترکیب بعض علم مثلثی نسبتون کی تعریف کرنیکی یہہ نکلتی ہے کہ دفعہ ۲۶ کے
موافق تعریف جیب اور مماس اور قاطع الزاویہ کی کرکے اب آگے اور تعریفات اسطرح کرین کہ

جیب التمام ایک زاویہ کی اوسکی تمامی کی جیب ہوتی ہے

مماس التمام ایک زاویہ کا اوسکی تمامی کا مماس ہوتا ہے

قاطع التمام ایک زاویہ کا اوسکی تمامی کا قاطع الزاویہ ہوتا ہے

اسواسطے کہ مثلث اع م مین زاویہ اع م تمامی زاویہ ا کی ہے اور

$$\text{جب اع م} = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}} = \text{جم ا}$$

$$\text{مس اع م} = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \frac{\text{ا م}}{\text{م ع}} = \text{مم ا}$$

$$\text{قط اع م} = \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}} = \frac{\text{ا ع}}{\text{م ع}} = \text{قم ا}$$

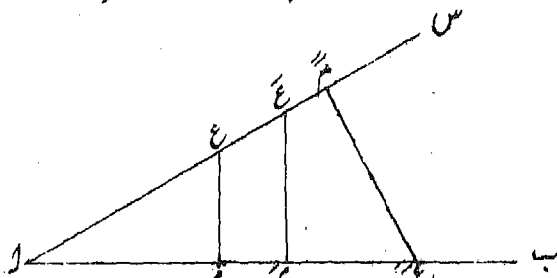
اور ان نتائج کو اسطرح بھی بیان کرسکتے ہین کہ

ایک زاویہ کی جیب اوسکی تمامی کے جیب التمام ہوتی ہے

ایک زاویہ کا مماس اوسکی تمامی کا مماس التمام ہوتا ہے

ایک زاویہ کا قاطع الزاویہ اوسکی تمامی کا قاطع التمام ہوتا ہے

(۲۰) جب تک زاویہ نہین بدلتا اوسکی علم مثلثی نسبتین نہین بدلتین

فرض کرو کہ ب ا س کوئی زاویہ ہے اس مین کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور ع م عمود ا ب پر نکالو

اور کوئی اور نقطہ عَ بھی مقرر کرکے عَ مَ عمود ا ب پر نکالو تو مثلثون کے تشابہ ہونے سے

$\frac{ع م}{ا ع} = \frac{عَ مَ}{ا عَ}$ یعنی جیب زاویہ ا کی وہی رہی خواہ زاویہ مثلث ا ع م سے پیدا ہو خواہ مثلث ا عَ مَ سے اور یہی حال اور کیفیت اور علم مثلثی نسبتونکی ہی اور ا ب مین عً بھی ایک نقطہ فرض کرکے عً مً عمود اس پر نکالو تو مثلثون ا ع م اور ا عً مً متشابہ ہوی اور $\frac{ع م}{ا ع} = \frac{عً مً}{ا عً}$

اب ہم بعض ارتباطات علم مثلثی نسبتون کے بیان کرتے ہین

(۳۱) اب حدود مذکور سے تو یہہ نتیجے بالکل عیان ہین کہ

مس ا × مم ا = ۱ اسیواسطے مس ا = $\frac{۱}{مم ا}$ اور مم ا = $\frac{۱}{مس ا}$

قط ا × جم ا = ۱ اسیواسطے قط ا = $\frac{۱}{جم ا}$ اور جم ا = $\frac{۱}{قط ا}$

قم ا × جب ا = ۱ اسیواسطے قم ا = $\frac{۱}{جب ا}$ اور جب ا = $\frac{۱}{قم ا}$

اور نیز مس ا = $\frac{ع م}{ا م} = \frac{ع م}{ا ع} \div \frac{ا م}{ا ع} = \frac{جب ا}{جم ا}$

مم ا = $\frac{ا م}{ع م} = \frac{ا م}{ا ع} \div \frac{ع م}{ا ع} = \frac{جم ا}{جب ا}$

(۳۲) ثابت کرو کہ $(جب ا)^۲ + (جم ا)^۲ = ۱$

مثلث قائم الزاویہ ا ع م مین

$$ع م^۲ + ا م^۲ = ا ع^۲$$

اسیواسطے $\frac{ع م^۲ + ا م^۲}{ا ع^۲} = ۱$

اسیواسطے $\left(\frac{ع م}{ا ع}\right)^۲ + \left(\frac{ا م}{ا ع}\right)^۲ = ۱$

یعنی $(جب ا)^۲ + (جم ا)^۲ = ۱$

(۳۳) اثبات مذکور کی نسبت اس بات کا بیان کرنا ضرور ہی کہ ۴۷ شکل ا مین ثابت ہوا ہے کہ مثلث قائم الزاویہ کے وتر قائمہ پر جو مربع بنایا جاے وہ برابر ہوتا ہے ان دو مربعون کے جو ان اضلاع پر کہ زاویہ قائمہ کے محیط ہین بنائے جائین اور یہہ بھی معلوم ہے کہ علم ہندسہ مین مربع کسی خط پر کھیچا جاے تو وہ علم حساب مین اوس عدد کے مربع سے تعبیر ہوتا ہی جو اوس خط کا

اندازہ بتلائے پس ان دو نتیجون کو ملا کر یہہ مساوات حسابیہ ہمکو حاصل ہو گی

$$\text{ع م}^2 + \text{ا م}^2 = \text{ا ع}^2$$

اس بات پر بہی خیال کرنا چاہئے کہ $(\text{جب ا})^2$ اختصاراً $\text{جب}^2\,\text{ا}$ کی طرح لکہا کرتے ہین اور $(\text{جب ا})^3$ کی جگہہ $\text{جب}^3\,\text{ا}$ اور علی ہذا القیاس یہی طریقہ اختصار تمام علم مثلثی نسبتون کے قواعد کے واسطے ہے نتیجہ دفعہ ۳۳ کو اکثر اسطرح لکہا کرتے ہین

$$\text{جب}^2\,\text{ا} + \text{جم}^2\,\text{ا} = 1$$

(۳۴) ثابت کرو کہ

$$(\text{قط ا})^2 = 1 + (\text{مس ا})^2 \quad \text{اور} \quad (\text{قم ا})^2 = 1 + (\text{مم ا})^2$$

مثلث قائم الزاویہ ا ع م مین

$$\text{ا ع}^2 = \text{ع م}^2 + \text{ا م}^2$$

اسواسطے $$\frac{\text{ا ع}^2}{\text{ا م}^2} = \frac{\text{ع م}^2}{\text{ا م}^2} + 1$$

اسواسطے $$\left(\frac{\text{ا ع}}{\text{ا م}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ع م}}{\text{ا م}}\right)^2 + 1$$

یعنی $$(\text{قط ا})^2 = 1 + (\text{مس ا})^2$$

اور چونکہ $$\text{ا ع}^2 = \text{ع م}^2 + \text{ا م}^2$$

$$\left(\frac{\text{ا ع}}{\text{ع م}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{ا م}}{\text{ع م}}\right)^2$$

یعنی $$(\text{قم ا})^2 = 1 + (\text{مم ا})^2$$

ان نتائج کو اکثر اسطرح لکہا کرتے ہین

$$\text{قط}^2\,\text{ا} = 1 + \text{مس}^2\,\text{ا} \quad \text{اور} \quad \text{قم}^2\,\text{ا} = 1 + \text{مم}^2\,\text{ا}$$

(۳۵) دفعات ۳۱ - ۳۴ مین جو نتائج ثابت ہوئے ہین اون سے ہم ہر ایک علم مثلثی نسبت کو ایک علم مثلثی نسبت مین بیان کر سکتے ہین مثلاً سب نسبتونکو جیب کی ارقام مین بیان کرو

$$\text{جم}\,ا = \sqrt{۱ - \text{جب}^2\,ا}$$ بموجب دفعہ ۳۲

$$\text{مس}\,ا = \frac{\text{جب}\,ا}{\text{جم}\,ا} = \frac{\text{جب}\,ا}{\sqrt{۱ - \text{جب}^2\,ا}}$$ (دفعہ ۳۱ و ۳۲)

$$\text{مم}\,ا = \frac{\text{جم}\,ا}{\text{جب}\,ا} = \frac{\sqrt{۱ - \text{جب}^2\,ا}}{\text{جب}\,ا}$$ (دفعات ۳۱ و ۳۲)

$$\text{قط}\,ا = \frac{۱}{\text{جم}\,ا} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{جب}^2\,ا}}$$ (دفعات ۳۱ و ۳۲)

$$\text{قم}\,ا = \frac{۱}{\text{جب}\,ا}$$ دفعہ ۳۱

$$\text{جع}\,ا = ۱ - \text{جم}\,ا = ۱ - \sqrt{۱ - \text{جب}^2\,ا}$$ دفعہ ۳۲

پھر ہم سب علم مثلثی نسبتون کو مماس کی رقمون مین بھی بیان کرسکتے ہین

$$\text{جب}\,ا = \frac{۱}{\text{قم}\,ا} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + \text{مم}^2\,ا}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + \frac{۱}{\text{مس}^2\,ا}}} = \frac{\text{مس}\,ا}{\sqrt{۱ + \text{مس}^2\,ا}}$$

(دفعات ۳۱ و ۳۴)

$$\text{جم}\,ا = \frac{۱}{\text{قط}\,ا} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + \text{مس}^2\,ا}}$$ (دفعات ۳۱ و ۳۴)

$$\text{مم}\,ا = \frac{۱}{\text{مس}\,ا}$$ (دفعہ ۳۱)

$$\text{قط}\,ا = \sqrt{۱ + \text{مس}^2\,ا}$$

$$\text{قم}\,ا = \frac{\sqrt{۱ + \text{مس}^2\,ا}}{\text{مس}\,ا}$$

$$\text{جع}\,ا = ۱ - \text{جم}\,ا = ۱ - \frac{۱}{\sqrt{۱ + \text{مس}^2\,ا}}$$

اب ہم خاص زاویونکی علم مثلثی نسبتون کی قیمتین دریافت کرتے ہین

(۳۶) ۴۵° کے زاویہ کی علم مثلثی نسبتون کی قیمتین دریافت کرو

ن
ع
ا م ب

فرض کرو کہ ب ا س ایک زاویہ ۴۵° کا ہی اور اس مین کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور ع م عمود ا ب پر نکالو چونکہ ع ا م نصف قائمہ ہی اسلئے زاویہ ا ع م بہی نصف قائمہ ہی اسواسطے

ع م = ا م

اب $\text{ع م}^2 + \text{ا م}^2 = \text{ا ع}^2$

پس $2\,\text{ع م}^2 = \text{ا ع}^2$

اسواسطے $\left(\frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

اسواسطے $\frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

پس جب $45^\circ = \frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ اور جم $45^\circ = \frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

مس $45^\circ = \frac{\text{ع م}}{\text{ا م}} = 1$ اور مم $45^\circ = \frac{\text{ا م}}{\text{ع م}} = 1$

قط $45^\circ = \frac{\text{ا ع}}{\text{ا م}} = \sqrt{2}$ قم $45^\circ = \frac{\text{ا ع}}{\text{ع م}} = \sqrt{2}$

جع $45^\circ = 1 -$ جم $45^\circ = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

(۲۷) ۶۰° اور ۳۰° کی علم مثلثی نسبتون کی قیمتون کو دریافت کرو

فرض کرو کہ ا ع ب مثلث متساوی الاضلاع ہی اور زاویہ ع ا ب مین ۶۰ درجے ہین

ع م عمود ا ب پر نکالو تو ا م = م ب اسیواسطے ا م = $\frac{1}{2}$ ا ب = $\frac{1}{2}$ ا ع

پس جم $60^\circ = \frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}} = \frac{1}{2}$

جب $60^\circ = \sqrt{(1 - \text{جم}^2\, 60^\circ)} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مس $60^\circ = \frac{\text{جب}\ 60^\circ}{\text{جم}\ 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} = \sqrt{3}$

مم ۶۰° = ۱/مس ۶۰° = ۱/√۳

قط ۶۰° = ۱/جم ۶۰° = ۲

قم ۶۰° = ۱/جب ۶۰° = ۲/√۳

جع ۶۰° = ۱ − جم ۶۰° = ۱/۲

اور جب ۳۰° = جم ۶۰° = ۱/۲ اور جم ۳۰° = جب ۶۰° = √۳/۲

مس ۳۰° = مم ۶۰° = ۱/√۳ اور مم ۳۰° = مس ۶۰° = √۳

قط ۳۰° = قم ۶۰° = ۲/√۳ اور قم ۳۰° = قط ۶۰° = ۲

جع ۳۰° = ۱ − جم ۳۰° = ۱ − √۳/۲

(۳۸) اگر زاویہ ۴۵° سے کم ہو تو جیب التمام زاویہ کی بڑی بہ نسبت جیب کے ہوگی اور اگر زاویہ بڑا ۴۵° سے اور چھوٹا ۹۰° سے ہو تو جیب التمام زاویہ چھوٹی بہ نسبت جیب کے ہوگی یہہ نتائج مثلث ع ا م کو دفعہ ۲۶ کی شکل دیکھنے سے صاف سمجھہ مین آجاینگی کیونکہ مثلث مین بڑا ضلع بڑے زاویہ کے مقابل ہوتا ہے

مثالیں

(۱) ایک خاص زاویہ کی جیب ۳/۵ ہی اور علم مثلثی نسبتوں کی قیمتین دریافت کرو

(۲) ایک خاص زاویہ کا مماس ۵/۱۲ ہی اور علم مثلثی نسبتوں کی قیمتین دریافت کرو

(۳) ایک خاص زاویہ کی جیب التمام √۳/۲ ہی اور زاویہ کی علم مثلثی نسبتین دریافت کرو

(۴) ثابت کرو کہ جب² بر مس بر + جم² بر مم بر + ۲ جب بر جم بر = مس بر + مم بر

(۵) ثابت کرو کہ ۲ (جب⁶ بر + جم⁶ بر) − ۳ (جب⁴ بر + جم⁴ بر) + ۱ = ۰

ان مساواتون کو حل کرو

(۶) جب² بر = ۳/۲ جم بر   (۷) جب بر + جم بر = ۱

(۸) جم بر = ۲ جم بر   (۹) جب² بر − ۲ جم بر + ۱/۴ = ۰

(۱۰) ۳ قط^۲ بر + ۸ = ۱۰ قط آ بر

(۱۱) معلوم ہے کہ جب (ا - ب) = ½ اور جم (ا + ب) = ½ تو ا اور ب کو دریافت کرو

باب چہارم

علامات جبریہ کا استعمال

(۳۹) باب گذشتہ مین ہم نے جو علم مثلثی نسبتون کی تعریفات کین اور بعض ارتباط اونہین باہم قائم کیے اوسمین قید زاویہ کے کم از قائمہ ہونیکی ہمیشہ ملحوظ رہے اب ہم ان تعریفات کو ایسا وسیع کرکے لکھتے ہین کہ وہ سب مقدار کے زاویون پر حاوی ہون اور اونمین جو ربط باہمی قائم کرین وہ بھی ہر مقدار کے زاویہ کے واسطے ہون

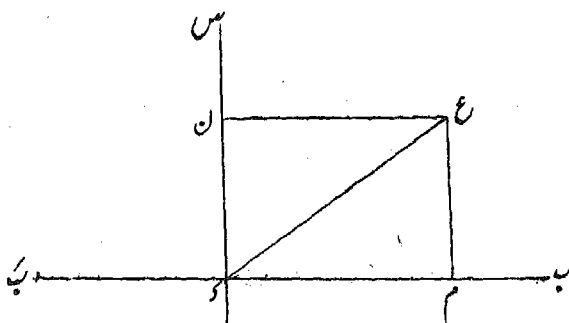
(۴۰) فرض کرو کہ ایک خط معین ہے د ایک نقطہ معین ہو اور ہمکو اس خط پر مقامات اور نقطون کے بلحاظ نقطہ د کے دریافت کرنے ہون تو مقام ہر نقطہ کا اس خط مین معلوم ہوجائیگا اگر ہمکو اوس نقطہ کا فاصلہ د سے در معلوم ہو اور یہہ جانتے ہون کہ وہ د کی کس جانب مین واقع ہوا ہے اس باب مین جب مہندسین نے بالاتفاق یہہ بات آسانی کے لئے ٹھہرائی ہے

م ——— د ——— م

کہ د سے خط معین پر جو فاصلے ایک سمت مین اندازہ کئے جائین اونکو مثبت اعداد سے تعبیر کرین اور فاصلے جو اس سمت سے مخالف سمت مین د سے اندازہ کئے جائین اونکو اعداد منفیہ سے تعبیر کرین مثلاً فرض کرو کہ د سے جو دائین طرف فاصلے ناپے جائین وہ مثبت اعداد سے تعبیر ہوتے ہین اور م ایک نقطہ ہے جسکا فاصلہ د سے ۲ یا + ۲ سے تعبیر ہوتا ہے تو نقطہ مَ کا د سے دوسری جانب مین اگر اوتنے فاصلہ پر ہوگا جتنے فاصلہ پر کہ م تھا تو فاصلہ اوسکا د سے - ۲ سے تعبیر ہوگا

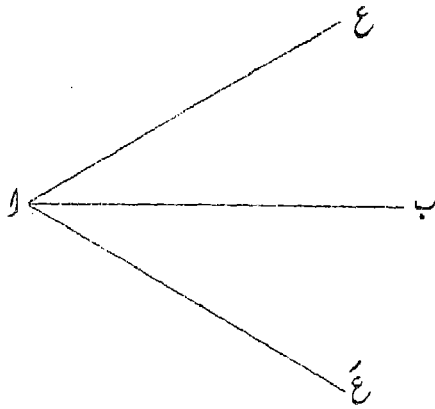
(۴۱) یہہ ترکیب جو مقام کے معین کرنے کی بوسیلہ اعداد جنپر علامات جبریہ متصرف ہین اختیار کی گئی ہے اوسکو اتفاق جمہور کہتے ہین اور اس اتفاق جمہور کے معنی یہہ ہین کہ جو

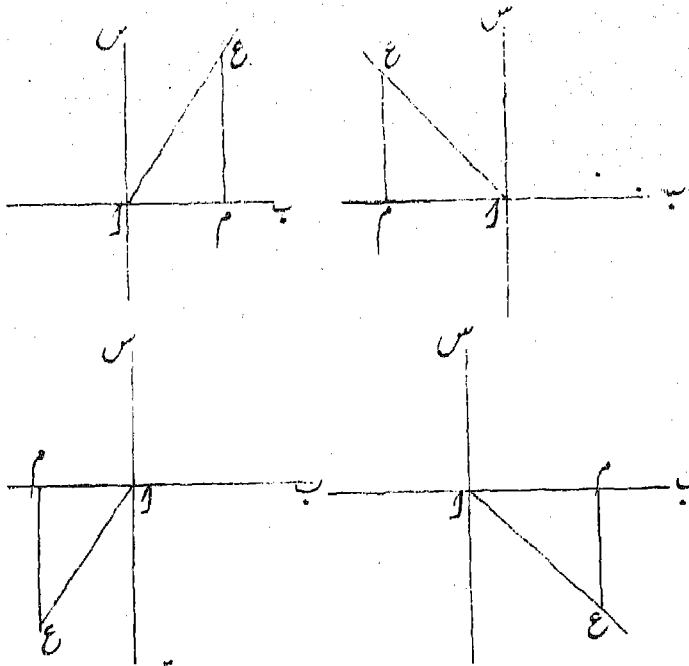
بات اختیار کی گئی ہے وہ کچہہ ضرور نہین ہے کہ اوسیطرح اختیار کیجاے بلکہ فقط اس اختیار کرنیمین تسہیل مطلب پر نظر کی گئی ہے سب ابتدائی جبر مقابلون مین علامت + اور − کی معنی بیان ہوا کرتے ہین کہ اوس سے مراد اعمال جمع اور تفریق ہین ابتدا مین تو طالب علم اوسے فقط یہی جمع اور تفریق سمجہتا ہے مگر جب آگے پڑہتا ہی تو اوسکے اور معنی بہی ان علامتون کے سمجہہ مین آنے لگتے ہین اور وہ اس بات کو جانتا ہے کہ علامات + اور − سے خواص مقادیر کے معلوم ہوتے ہین اور ان علامتون کے یہہ دو معنی لینے سے ایک اوّل تو اعمال جمع اور تفریق اور دوم خواص مقادیر مفہوم ہوتے ہین جبر مقابلہ مین کوئی تقیض یا بے ترتیبی نہین پیدا ہوتی بلکہ اوسے اور تقویت اس علم جبر مقابلہ کو حاصل ہوتی ہے باب پنجم اور چہاردہم جبر مقابلہ کو پڑہو اس بات کا ہمکو اختیار ہے کہ دے دونو سمتون سے کسی ایک سمت کو مثبت مقرر کرین مگر جب کسی ایک سمت کو مثبت ٹہرالین تو ساری تحقیقات مین اوسکو مثبت ہی رہنے دین یہہ نکرین کہ کبہی کسی سمت کو مثبت ٹہرائین اور پہر اوسیکو منفی مقرر کرین

(۴۲) فرضکرو کہ ب ی ب اور س ی س دو خط ہین جو ایک دوسرے پر زاویہ قائمہ بناتے ہین

ب ی کو کسی نقطہ ب تک اور س ی کو کسی نقطہ س تک بڑہاؤ اور فرض کرو کہ ع کوئی نقطہ اوسی سطح مین ہے جسمین یہہ دونو خط ہین تو مقام ع کا ہمکو معلوم ہوجائیگا اگر ہر ایک

ب بَ اور س سَ سے فاصلہ ع کا معلوم ہوا اور یہہ بہی معلوم ہو کہ وہ ان خطوں مین سے ہر ایک خط کی کس جانب مین واقع ہے تو ع م اور ع ن عمود خطوط ب بَ اور س سَ پر نکالو اب سب مہندسین نے بالاتفاق یہہ باتین مقرر کین ہین کہ اگر ع اوپر ب بَ کے واقع ہو تو فاصلے دن یا ع م مثبت اعداد سے تعبیر ہون اور اگر ع نیچے ب بَ کے واقع ہو تو وہ فاصلے منفی اعداد سے تعبیر ہون اور اگر ع دائین طرف س سَ کے واقع ہو فاصلے دم یا ع ن مثبت اعداد سے تعبیر ہون اور اگر ع بائین طرف س سَ کے واقع ہون تو یہہ فاصلے منفی اعداد سے تعبیر ہون

(۴۳) مقدار زاویہ کی نسبت بہی اسی قبیل کا اتفاق جمہور ہے

ع
ا ب
عَ

فرض کرو کہ خط اع مقام اب سے متحرک ہو اور ایک سمت مین ا کے گرد حرکت کر کے زاویہ ع ا ب مرتسم کرے اور اس زاویہ کو مثبت اعداد سے تعبیر کرین اور اگر خط اع مقام اب سے گرد ا کے سمت مخالف مین حرکت کر کے زاویہ عَ اب پیدا کرے تو اس زاویہ کو منفی اعداد سے تعبیر کرینگے مثلاً زاویون ب اع اور ب اعَ مین سے ہر ایک زاویہ ایک تہائی قائمہ کی ہو تو اول زاویہ کو مثبت کسر $\frac{1}{6}$ سے اور دوسرے زاویہ کو منفی کسر $-\frac{1}{6}$ سے تعبیر کرینگے

(۴۴) اب ہم علم مثلثی نسبتوں کی حدود و توسیع کے ساتھ بیان کرتے ہیں

فرض کرو کہ اب اور اس دو خط ایک دوسرے پر زاویے قائمہ بناتے ہوں اور اب سے ایک خط
گرد ا کے اس کی جانب میں حرکت کرے اور ا ع کے مقام پر پہونچے اور ع م عمود اب پر
یا اب ممدودہ پر کھینچو اور ا ع کو ہمیشہ مثبت سمجھو اگر ا م اوس جانب میں ا س کے واقع ہو
جس جانب میں ب ہے تو ا م کو مثبت خیال کرو اور اگر ایسا نہ ہو کہ مخالف جانب میں
واقع ہو تو ا م کو منفی سمجھو اور اگر ع اوسی جانب میں اب کے واقع ہو جس جانب میں س
واقع ہے تو ع م کو مثبت خیال کرو اور اگر ایسا نہ ہو بلکہ مخالف جانب میں واقع ہو
تو ع م کو منفی خیال کرو اور فرض کرو کہ زاویہ ع ا ب کا ا سے تعبیر ہوتا ہے تو

جب ا = $\frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}}$ اور مس ا = $\frac{\text{ع م}}{\text{ا م}}$ اور قط ا = $\frac{\text{ا ع}}{\text{ا م}}$

جم ا = $\frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}}$ مم ا = $\frac{\text{ا م}}{\text{ع م}}$ قتم ا = $\frac{\text{ا ع}}{\text{ع م}}$

سج ا = ۱ − جم ا اور سجم ا = ۱ − جب ا

پس اس سے معلوم ہوا کہ علم مثلثی نسبتین مثبت منفی اعداد صحیح یا کسور ہوتی ہین اسواسطے مثبت زاویہ کی خواہ کچھہ ہی مقدار ہو اوسکی علم مثلثی نسبتونکی تعریف عام اب ہوگئی اور نیز منفی زاویہ کی بہی خواہ کچھہ ہی مقدار اوسکی علم مثلثی نسبتون کی ہو تعریف عام ہوگی اگر اون اتفاق جمہور کو اختیار کرین کہ کسی منفی زاویہ کی علم مثلثی نسبتین وہی ہوتی ہین جو اوسکے مطابق مثبت زاویہ کی ہوتی ہین مثلاً اخر شکل مین زاویہ ب د ع کو ہم منفی خیال کر سکتے ہین اور اوسکی مقدار کو $-\frac{\pi}{3}$ سمجھہ سکتے ہین تو علم مثلثی نسبتین اوسکی وہی ہونگین جو اوس زاویہ کے علم مثلثی نسبتین ہین جو خط متحرک د ع کے مثبت سمت مین حرکت کرنے سے اور اوس مقام پر پہونچنے سے جو شکل مین بنا ہوا ہے پیدا ہوتا ہے یعنی علم مثلثی نسبتین زاویہ $-\frac{\pi}{3}$ کی وہی ہونگین جو زاویہ $2\pi - \frac{\pi}{3}$ کی علم مثلثی نسبتین ہین

(۴۵) ان تعریفات سے یہہ نتیجہ استخراج ہوتا ہے کہ اگر دو زاویون مین تفاوت بقدر چار قائمون یا اضعاف چار قائمون کے ہو تو دونو زاویونکی علم مثلثی نسبتین ایک ہی ہونگین

(۴۶) زاویے جو قائمہ سے بڑے نہ ہون اونکے واسطے جو ارتباطات ذیل ثابت ہوئی ہین وہ عام ہین زاویون کی خواہ کچھہ ہی مقدار ہو اور خواہ وہ منفی ہون یا مثبت ہون

مس ا × مم ا = ۱ اور قط ا × جم ا = ۱ اور قم ا × جب ا = ۱

مس ا = $\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}}$ اور مم ا = $\frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}}$

جب^2 ا + جم^2 ا = ۱ اور قط^2 ا = ۱ + مس^2 ا اور قم^2 ا = ۱ + مم^2 ا

اس مساوات

جب^2 ا + جم^2 ا = ۱

سے ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ جب ا = ± $\sqrt{(\text{۱} - \text{جم}^2\ \text{ا})}$ یا جم ا = ± $\sqrt{(\text{۱} - \text{جب}^2\ \text{ا})}$ ہر خاص صورت مین اس بات کا فیصلہ ہو سکتا ہے کہ جذر پر کون سی علامت لینی چاہیے

(۴۷) زاویہ جسقدر دو قائمون سے کم ہوتا ہے اوس کمی کو تکملہ یا تکمل اوس زاویہ کا کہتے ہین

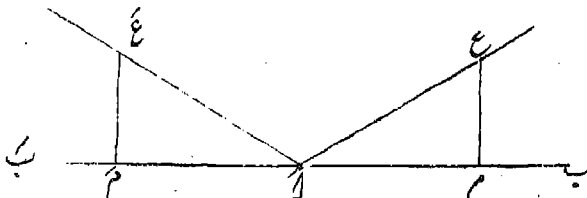
اگر کسی زاویے کے درجونکی تعداد کو ا تعبیر کریں تو تکملہ یا مکمل کی درجونکی تعداد کو ۱۸۰° − ا تعبیر کریگا اگر بہ مقیاس قوسی کسی زاویہ کا ہو تو کہ − بہ مقیاس قوسی بہ کے تکملہ کا ہوگا اگر تکملہ کے لفظی تعریف پر خیال کریں تو اوسکے معنی محدود یہہ ہونگے کہ اصلی زاویہ مثبت ہو اور دو قائموں سے چھوٹا ہو لیکن اس لفظ کے معنی وسعت کے ساتھہ آتے ہیں ا خواہ کوئی مثبت یا منفی عدد ہو جس زاویہ میں ا تعداد درجوں کی ہوگی اوسکے تکملہ میں ۱۸۰ − ا تعداد درجوں کی ہے اور علی ہذا القیاس بہ خواہ کچھہ ہی ہو زاویہ جسکا مقیاس قوسی کہ − بہ ہو تکملہ اوس زاویہ کا کہلائیگا جسکا مقیاس قوسی بہ ہو

(۴۸) کسی زاویہ اور اوسکے تکملہ کی علم مثلثی نسبتوں کا مقابلہ کرو

فرض کرو کہ ع ا ب کوئی زاویہ ہو ب ا کو بَ تک خارج کرو اور زاویہ عَ ا بَ = ع ا ب کے بناؤ

اعَ = اع کے بناؤ اور ع م اور عَ مَ عمود ب بَ پر نکالو

زاویہ عَ ا ب = ۱۸۰° − عَ ا بَ = ۱۸۰° − ع ا ب پس عَ ا ب تکملہ ع ا ب کا ہے مثلث ع ا م اور عَ ا مَ علم ہندسہ کے موافق سب طرح سے آپسمین برابر ہیں

اب جب ا = ع م / ا ع اور جب (۱۸۰° − ا) = عَ مَ / ا عَ

اور چونکہ ع م اور عَ مَ متحد المقدار اور متحد العلامت ہیں اسواسطے

جب ا = جب (۱۸۰° − ا)

اور نیز جم ا = ا م / ا ع اور جم (۱۸۰° − ا) = ا مَ / ا عَ

اب ا م اور ا مَ متحد المقدار او مختلف العلامت ہین کیونکہ وہ مخالف سمتون مین اندازہ ہوتے ہین

جم ا = - جم (۱۸۰° - ا)

زاویہ ا کی اور اوسکی تکملہ کو اور علم مثلثی نسبتون کا مقابلہ دو طرح سے کرسکتے ہین ایک تو شکلین بناکر دوم ان دو نتیجون سے جو اوپر حاصل ہوئی ہین اب ہم اس آخر طرح کو اختیار کرتے ہین

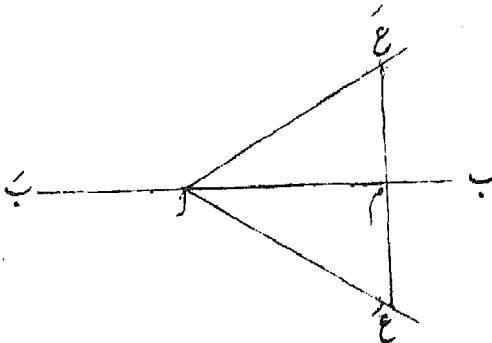
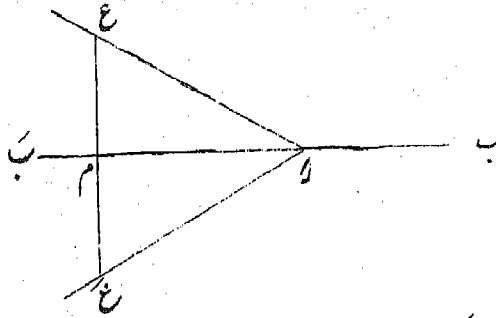
مس (۱۸۰° - ا) = جب (۱۸۰° - ا) / جم (۱۸۰° - ا) = جب ا / - جم ا = - مس ا

مم (۱۸۰° - ا) = جم (۱۸۰° - ا) / جب (۱۸۰° - ا) = - جم ا / جب ا = - مم ا

قط (۱۸۰° - ا) = ۱ / جم (۱۸۰° - ا) = ۱ / - جم ا = - قط ا

قم (۱۸۰° - ا) = ۱ / جب (۱۸۰° - ا) = ۱ / جب ا = قم ا

جع (۱۸۰° - ا) = ۱ - جم (۱۸۰° - ا) = ۱ + جم ا

پس جیب اور قاطع التمام ایک زاویے اور اوسکے تکملہ کے جیب اور قاطع التمام ایک ہی ہین اور سواء جیب معکوس کے اور باقی علم مثلثی نسبتین ایک زاویہ کی اور اوسکے تکملہ کی موافق اپنی اپنی نظیر کے تعداداً مساوی ہین مگر علامت مین مخالف ہین

(۴۹) ثابت کرو کہ جب (-ا) = - جب ا اور جم (-ا) = جم ا

فرض کرو کہ ع ا ب کوئی زاویہ ہو ع م عمود ب ا ب پر نکالو اور اوسے عَ تک خارج کرو اور م عَ کو طول میں برابر ع م کے بناؤ اور ملاؤ ا عَ تو زاویے عَ ا ب اور ع ا ب جو مخالف سمتوں میں اب کے اندازہ کئے جاتے ہیں متحد الکمیت ہیں اور اگر ع ا ب تعبیر ا سے ہو تو عَ ا ب تعبیر ـــ ا سے ہوگا اور

جب ا = ع م / ا ع اور جب (ـــ ا) = عَ م / ا عَ

اور عَ م تعداد میں مساوی ع م کے ہے مگر علامت میں مختلف ہے

جب (ـــ ا) = ـــ جب ا

اور نیز جم (ـــ ا) = ا م / ا عَ = ا م / ا ع = جم ا

اور علاوہ اسکے س (ـــ ا) = جب (ـــ ا) / جم (ـــ ا) = ـــ جب ا / جم ا = ـــ س ا

مم (ـــ ا) = جم (ـــ ا) / جب (ـــ ا) = جم ا / ـــ جب ا = ـــ مم ا

قط (ـــ ا) = ۱ / جم (ـــ ا) = ۱ / جم ا = قط ا

قم (ـــ ا) = ۱ / جب (ـــ ا) = ۱ / ـــ جب ا = ـــ قم ا

جع (ـــ ا) = ۱ ـــ جم (ـــ ا) = ۱ ـــ جم ا = جع ا

(۵۰) ثابت کرو کہ جب (۱۸۰° + ا) = ـــ جب ا اور جم (۱۸۰° + ا) = ـــ جم ا

فرض کرو کہ ع ا ب کوئی زاویہ ہو اور ع ا کو عَ تک خارج کرو اور ا عَ کو برابر طول میں ا ع کے بناؤ اور ع م اور عَ مَ کو عمود ب ا ب پر نکالو پس اگر ع ا ب کو

اسے تعبیر کرین تو زاویہ ع اب کو اوسی سمت مین $۱۸۰^\circ + ا$ سے تعبیر کرینگے

مثلث ع ا م اور عَ ا مَ علم ہندسہ کے موافق سب طرح سے آپسمین برابر ہین

$$\text{اور جب } ا = \frac{ع م}{ا ع} \text{ اور جب } (۱۸۰^\circ + ا) = \frac{عَ مَ}{ا عَ}$$

$$\text{جم } ا = \frac{ا م}{ا ع} \text{ اور جم } (۱۸۰^\circ + ا) = \frac{ا مَ}{ا عَ}$$

اب ع م اور عَ مَ متحد المقدار اور مختلف العلامت ہین اور ا م اور ا مَ متحد المقدار مختلف العلامت ہین پس

$$\text{جب } (۱۸۰^\circ + ا) = -\text{جب } ا \text{ اور جم } (۱۸۰^\circ + ا) = -\text{جم } ا$$

$$\text{اور مس } (۱۸۰^\circ + ا) = \frac{\text{جب } (۱۸۰^\circ + ا)}{\text{جم } (۱۸۰^\circ + ا)} = \frac{-\text{جب } ا}{-\text{جم } ا} = \text{مس } ا$$

$$\text{مم } (۱۸۰^\circ + ا) = \frac{\text{جم } (۱۸۰^\circ + ا)}{\text{جب } (۱۸۰^\circ + ا)} = \frac{-\text{جم } ا}{-\text{جب } ا} = \text{مم } ا$$

اور علی ہذا القیاس قط $(۱۸۰^\circ + ا) = -$ قط ا اور قم $(۱۸۰^\circ + ا) = -$ قم ا

ان اصولی نتائج کو ایک اور طریقہ سے بھی اسطرح لکھہ سکتے ہین

$$\text{جب } ا = -\text{جب } (ا - ۱۸۰^\circ) \text{ و جم } ا = -\text{جم } (ا - ۱۸۰^\circ)$$

(۵۱) دفعات ۴۸ و ۴۹ و ۵۰ کے نتائج صحیح ہین خواہ مقدار زاویہ ا کی کچھہ ہو اور ا مثبت ہو یا منفی ہو ان باتون کو طالب علم خوب غور سے خیال کرے

اول دفعہ ۴۹ مین ا کی خواہ کچھہ ہی مقدار ہو اور وہ مثبت ہو یا منفی ہو ہمیشہ خط ع م عَ ایک خط مستقیم ہوتا ہی اور نقاط ع اور عَ برابر فاصلہ پر م سے مخالف سمتون مین ہوتی ہین اور زاویے ع اب اور عَ اب متحد الکمیت ہونگے مگر علامت مین مختلف ہونگے پس دفعہ ۴۹ کے نتیجہ کو ایک کلیہ سمجھنا چاہیئے دوم دفعہ ۵۰ مین اصلی باتین اثبات کی یہہ ہین کہ م اور مَ برابر فاصلہ پر ا سے مخالف سمتون مین ہون اور ع اور عَ برابر فاصلہ پر خط ب اب سے ہون اور مخالف سمت مین ہون اور شکل سے ہمکو تحقیق معلوم ہوتا ہی کہ اصلی باتین ہمیشہ ہمکو حاصل ہو سکتی ہین اگر ع اب کوئی مثبت زاویہ ہو تو اوسکے زاویہ ۱۸۰° کا زیادہ کرنے

وہ زاویہ حاصل ہوتا ہی جو اب اور اع کے درمیان واقع ہو اگر ع اب کوئی منفی زاویہ ہو تو اوسپر زاویہ ۱۸۰° کو زیادہ کرنے سے وہ زاویہ حاصل ہوتا ہے جو درمیان اع اور اب کے واقع ہی پس اسلئے دفعہ ۵۰ کے کلیہ ہونیکا ہمکو یقین واثق ہوگیا

دفعات ۴۹ اور ۴۰ پر دفعہ ۴۸ کا کلیہ ہونا موقوف ہی اسواسطے کہ

جب ا = ـ جب (ا ـ ۱۸۰°) بموجب دفعہ ۵۰ کے یہہ ایک کلیہ ہی

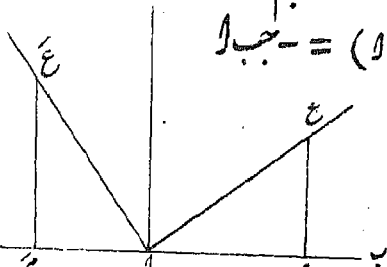
جب (ا ـ ۱۸۰°) = ـ جب (۱۸۰° ـ ا) بموجب دفعہ ۴۹ کے یہہ ایک کلیہ ہے

اسیواسطے بالعموم جب ا = جب (۱۸۰ ـ ا)

اور پہر جم ا = ـ جم (ا ـ ۱۸۰) بموجب دفعہ ۵۰ کے کلیہ ہے

جم (ا ـ ۱۸۰°) = جم (۱۸۰° ـ ا) بموجب دفعہ ۴۹ کے کلیہ ہے

اسیواسطے جم ا = ـ جم (۱۸۰° ـ ا) کلیہ ہے

(۵۲) ثابت کرو کہ جب (۹۰ + ا) = جم ا

اور جم (۹۰° + ا) = ـ جب ا

فرض کرو کہ ع اب کوئی زاویہ ہی اور اعَ زاویے قائمے اع پر بنا ہی اور اس طرح سے واقع ہی کہ خط متحرک زاویہ قائمہ مین مثبت سمت مین گرد ا کے حرکت کرکے مقام اع مقام اعَ پر پہونچے پس اگر ع اب کو اسے تعبیر کرین

تو ۹۰° + ا سے عَ اب تعبیر ہوگا اعَ = اع کے بناؤ اور ع م اور عَ مَ عمود ب اب پر نکالو تو زاویہ ع ام علم ہندسہ کے موافق برابر زاویہ اعَ مَ کے ہوا اور مثلث ع ام اور عَ اَمَ علم ہندسہ مین سب طرح سے آپسمین برابر ہین اور

$$\text{جب}\,(۹۰° + ا) = \frac{\text{عَ مَ}}{\text{اعَ}} \quad \text{اور جم ا} = \frac{\text{ام}}{\text{اع}}$$

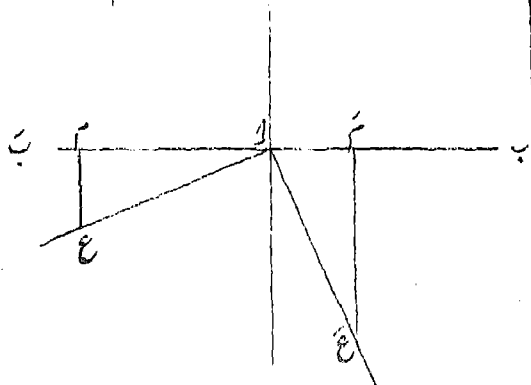
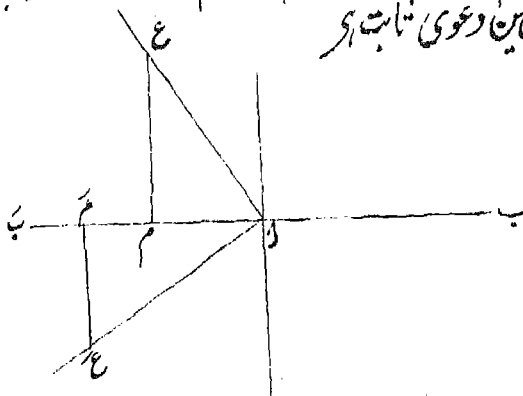
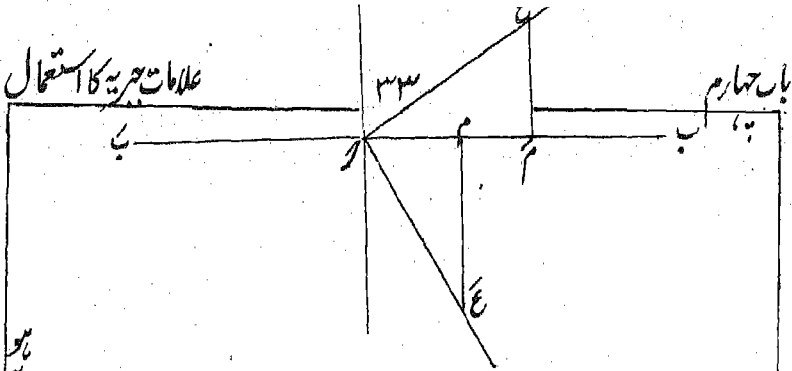
اب ع م اور ا م متحد الکمیت اور بموجب دفعہ ۴۲ کے متحد العلامت ہین پس

جب (۹۰ + ۱) = جم ۱

جم (۹۰ + ۱) = ا م / ا ع اور جب ۱ = ع م / ا ع

اب ا م اور ع م متحد الکمیت ہین لیکن بموجب دفعہ ۴۲ کے مختلف العلامت ہین

پس جم (۹۰ + ۱) = - جب ۱

(۵۳) اب یہہ ثابت کرتے ہین کہ دفعہ گذشتہ کا دعوی سب جزئیات پر حاوی ہی اور ایک کلیہ ہے اور اوسکی مختلف صورتون کا امتحان کرتے ہین دفعہ گذشتہ کی شکل مین فرض کرو کہ ۱ ایک نسبت زاویہ اول ربعہ مین واقع ہی نیچے تینون شکلون مین زاویہ دوم وسوم وچہارم ربعہ مین جدا جدا واقع ہے ہر ایک صورت مین مثلث ع ا م اور ع ا م علم ہندسہ کے موافق سب طرح سے آپسمین برابر ہین اور ع م اور ا م متحد العلامت ہین اور ا م اور ع م مختلف العلامت ہین پس اگر ا نسبت ہو تو سب صورتون مین دعوی ثابت ہی

اس دفعہ اور دفعہ گذشتہ کی چارون شکلون سے دعوی اوس صورتمین بہی ثابت ہوسکتا ہی کہ منفی زاویہ ہو آخر شکل مین زاویہ ا درمیان ۰ اور ـ ۹۰° کے درمیان واقع ہی اور تیسری شکل مین زاویہ ا ـ ۹۰° اور ـ ۱۸۰° کے درمیان واقع ہی اور دوسری شکل مین زاویہ ا درمیان ـ ۱۸۰° اور ـ ۲۷۰° کے درمیان واقع ہی اور اول شکل مین زاویہ درمیان ـ ۲۷۰° اور ـ ۳۶۰° کے درمیان واقع ہے

(۵۴) اگر کسی زاویہ مین تعداد درجات ا ہو تو زاویہ ۹۰ ـ ا کو تمامی زاویہ ا کی کہتے ہین پس $\frac{\pi}{2}$ ـ ر بمقیاس قوسی اوس زاویہ کی تمامی کا ہی جسکا مقیاس قوسی ر ہے دفعہ ۲۹ مین زاویہ کی تمامی کا ذکر اوس صورت مین کہ زاویہ مثبت قائمہ سے کم ہو گیا ہی مگر اب یہہ قید قائمہ سے کم ہونے کی اور مثبت ہونے کی نہین رہیگی اب ہم ان دعوون کو اسطرح ثابت کرتے ہین کہ وہ سب جزئیات پر محیط ہون جیب ایک زاویہ کی برابر تمامی کے جیب التمام کے ہوتی ہے اور جیب التمام ایک زاویہ کی برابر اوسکی تمامی کی جیب کے ہوتی ہی دفعات ۵۲ اور ۵۳ کی مختلف صورتون کو امتحان کرنے سے یہہ دعوی کلیتاً ثابت ہوتے ہین اور وہ اون نتائج سے جو ابتک ثابت ہوئی ہین مستنبط ہو سکتے ہین

مثلاً ہم نے ثابت کیا ہے کہ

جب (۹۰° + ا) = جم ا بموجب دفعہ ۵۲ و ۵۳ کے ایک کلیہ ہے

جب (۹۰° + ا) = جب (۱۸۰° ـ ۹۰° ـ ا) بموجب دفعہ ۵۱ کے ایک کلیہ ہے

اسواسطے جب (۹۰° ـ ا) = جم ا کلیہ ہے

پس اگر ۹۰° − ا = اَ کے فرض کرین تو ا = ۹۰° − اَ پس

جب اَ = جم (۹۰° − ا) یہہ کلیہ ہے

(۵۵) سب زاویون کی علم مثلثی نسبتون کو ہم قائمہ سے کم مثبت زاویہ کی قسمون مین بیان کر سکتے ہین
اسواسطے کہ اول تو ہم ان صور قانونیہ جب (−ا) = −جب ا اور جم (−ا) = جم ا
اور اون نتائج سے جو ان سے دفعہ ۴۹ مین مستنبط کرکے لکہی منفی زاویہ کی علم مثلثی نسبتونکو اونکے
مطابق مثبت زاویونکے علم مثلثی نسبتون مین تعبیر کر سکتے ہین اسلئے اگر ہم چاہین تو صرف مثبت
زاویون ہی پر خیال کرین دفعہ ۵۴ کے موافق چار قائمہ کے اضعاف کو ہم ساقط کر سکتے ہین
اسواسطے جو زاویہ ہو اوسمین ان اضعاف کو ساقط کرکے زاویہ کو کم از چار قائمہ بنا سکتے ہین
اور پہر موجب دفعہ ۵۰ کے جب (۱۸۰° + ا) = −جب ا اور جم (۱۸۰° + ا) = −جم ا
سے اوس زاویہ کی علم مثلثی نسبتون کا موقوف علیہ بنا سکتے ہین جو دو قائمون سے زائد نہو
اور پہر موجب دفعہ ۴۸ کے صور قانونیہ جب (۱۸۰° − ا) = جب ا اور جم (۱۸۰° − ا) = −جم ا
جم (۱۸۰° − ا) = −جم ا انکے نتائج مستنبطہ سے ہر زاویہ کی علم مثلثی نسبتونکو
اوس زاویہ کی علم مثلثی نسبتون کا موقوف علیہ بنا سکتے ہین کہ قائمہ سے بڑا نہو مثلاً

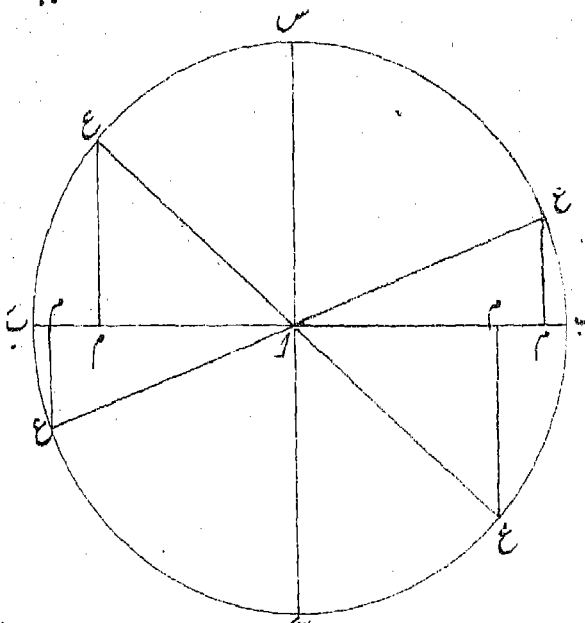
جب ۶۰۰° = جب (۳۶۰° + ۲۴۰°) = جب ۲۴۰° = جب (۱۸۰° + ۶۰°) = −جب ۶۰°

مس (−۱۰۰۰°) = −مس ۱۰۰۰° = −مس (۷۲۰° + ۲۸۰°) = −مس ۲۸۰°

= −مس (۱۸۰° + ۱۰۰°) = −مس ۱۰۰° = −مس (۱۸۰° − ۸۰°) = مس ۸۰°

(۵۶) جب زاویہ متغیر ہو تو اوسکی جیب کی تغیرات کو تحقیق کرو

فرض کرو کہ ب ا بَ اور س ا سَ ایک دوسرے پر زاویہ قائمہ بناتے ہین اور خط ا ع
کا مستقل اور معین طول ہے اور وہ گرد ا انجام کے مقام معین ا ب سے جائیگا کہ
ع سے دائرہ ب س بَ سَ مرتسم ہو اور ع کے کسی مقام سے ع م عمود ب ا بَ پر نکالو تو

جب ع ا ب = ع م / ا ع

جب اع منطبق اب پر ہوتا ہی تو ع م فنا ہوتا ہی اسلیے جب زاویہ صفر ہوتا ہے تو اوسکی جیب بھی صفر ہوتی ہی اور جب اع اول ربعہ مین حرکت کرتا ہی تو ع م مثبت ہوتا ہے اور متواتر بڑہتا جاتا ہی یہان تک کہ اع منطبق اس پر ہوتا ہے اور ع م برابر اع کے ہوجاتا ہی پس زاویہ جب ۰ سے ۹۰ تک بڑہتا ہی اوسکی جیب ۰ سے ۱ تک بڑہتی ہے اور جب اع دوسرے ربعہ مین حرکت کرتا ہی تو ع م مثبت ہوتا ہی اور متواتر گہٹتا جاتا ہی یہان تک کہ اع منطبق اب' پر ہوجاتا ہی اور ع م فنا ہوجاتا ہی پس جب زاویہ ۹۰ سے ۱۸۰ تک بڑہتا ہی تو جیب ۱ سے ۰ تک گہٹتی ہی اور جب اع تیسرے ربعہ مین حرکت کرتا ہی تو ع م منفی ہوتا ہے اور تعداداً بڑہتا ہی جب تک کہ اع منطبق اس' پر ہوتا ہے پس جب زاویہ ۱۸۰ سے ۲۷۰ تک بڑہتا ہے تو جیب منفی ہوتی ہے اور تعداداً ۰ سے -۱ تک بڑہتی ہی اور جب اع چوتھے ربعہ مین متحرک ہوتا ہی تو ع م منفی ہوتا ہی اور تعداداً گہٹتا ہی جب تک کہ اع منطبق اب پر ہوتا ہے پس زاویہ ۲۷۰ سے ۳۶۰ تک بڑہتا ہی تو جیب منفی ہوتی ہے اور تعداداً -۱ سے ۰ تک گہٹتی ہے

(۵۷) زاویہ کی جیب التمام مین جو تغیرات زاویہ کی متغیر ہونے سے واقع ہوتی ہین اونکو دریافت کرنا

دفعہ گذشتہ کی شکل مین

جم ع ا ب = ام / اع

ابتدا مین اع منطبق اب پر ہوتا ہی اسلیئے ام = اع پس جب زاویہ صفر ہو تو جیب التمام ا ہوتی ہے جبکہ اع اول ربعہ مین حرکت کرتا ہے تو ام مثبت ہوتا ہی اور متواتر گھٹتا جاتا ہے جب تک کہ اع منطبق اس پر ہوتا ہی اور پھر ام فنا ہو جاتا ہی پس زاویہ ۰ سے ۹۰ تک بڑھتا ہی تو جیب التمام ا سے ۰ تک گھٹتے ہی اور جب اع دوسرے ربعہ مین حرکت کرتا ہی تو ام منفی ہوتا ہے اور تعداداً بڑھتا جاتا ہی جب تک اع منطبق اب' پر ہوتا ہی پس زاویہ ۹۰ سے ۱۸۰ تک بڑھتا ہی تو جیب التمام منفی ہوتی ہے اور تعداداً ۰ سے ۱ تک بڑھتی ہے جب اع تیسرے ربعہ مین حرکت کرتا ہے تو ام منفی ہوتا ہے اور تعداداً کم ہوتا ہی جب تک کہ اع منطبق اس' پر ہوتا ہی پس زاویہ ۱۸۰ سے ۲۷۰ تک بڑھتا ہی تو جیب التمام منفی ہوتی ہے اور تعداداً ۱ سے ۰ تک گھٹتی ہے اور جب اع چوتھی ربعہ مین حرکت کرتا ہی تو ام مثبت ہوتا ہے اور متواتر بڑھتا جاتا ہی جب تک کہ اع منطبق اب پر ہوتا ہے پس زاویہ جب ۲۷۰ سے ۳۶۰ تک بڑھتا ہی تو جیب التمام مثبت ہوتی ہی اور ۰ سے ۱ تک بڑھتی ہے

(۵۸) زاویہ کے مماس مین جو تغیرات زاویہ کے متغیر ہونے سے واقع ہوتے ہین اونکو تحقیق کرو

دفعہ ۵۶ کی شکل مین

مس ع ا ب = ع م / ا م

ابتدا مین اع منطبق اب پر ہوتا ہی اور ع م فنا ہوتا ہی اور ام = اب پس زاویہ جب صفر ہو تو مماس بھی صفر ہوتا ہی اور جب اع اول ربعہ مین حرکت کرتا ہی تو ع م اور ام دونو مثبت ہوتے ہین اور ع م متواتر بڑھتا ہی اور ام متواتر گھٹتا ہی جب تک کہ

ا ع منطبق ا س پر ہوتا ہی پس جب زاویہ ۰ سے ۹۰° تک بڑہتا ہی تو مماس صفر سے بے حد و نہایت بڑہتا ہے پس زاویہ کو ۹۰° کے بہت قریب لیکر مماس کو جہان تک چاہیں بڑہا سکتے ہین اور اختصار کے واسطے اس مطلب کو یون ادا کیا کرتے ہین مماس ۹۰° کا لا نہایت ہوتا ہے اور جب ا ع دوسرے ربعہ مین حرکت کرتا ہی تو ع م مثبت ہوتا ہی اور ا م منفی اور ع م متواتر گہٹتا ہی اور ا م تعدادا بڑہتا ہی جب تک کہ ا ع منطبق ا ب' پر ہوتا ہی پس زاویہ جب ۹۰° سے ۱۸۰° تک بڑہتا ہی تو مماس منفی ہوتا ہے اور تعدادا لا نہایت سے صفر تک گہٹتا ہی اور جب ا ع تیسرے ربعہ مین حرکت کرتا ہی تو ع م اور ا م منفی ہوتے ہین اور ع م تعدادا بڑہتا ہی اور ا م تعدادا گہٹتا ہی جب تک کہ ا ع منطبق ا س' پر ہوتا ہے پس زاویہ ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑہتا ہی اور مماس مثبت ہوتا ہی اور ۰ سے بے حد و نہایت بڑہتا ہی پس زاویہ ۲۷۰° کے نہایت قریب لینے سے مماس کو جتنا چاہیں بڑہا سکتے ہین اور موافق سابق کے اس مضمون کو بہی اختصار کے ساتھہ یون بیان کیا کرتے ہین کہ مماس ۲۷۰° کا لا نہایت ہوتا ہی اور جب ا ع چوتھی ربعہ مین حرکت کرتا ہی تو ع م منفی ہوتا اور ا م مثبت ہوتا ہی اور ع م متواتر تعدادا گہٹتا جاتا ہی اور ا م زیادہ ہوتا ہی جب تک کہ ا ع منطبق ا ب پر ہوتا ہی پس زاویہ ۲۷۰° سے ۳۶۰° تک بڑہتا ہی مماس منفی ہوتا ہے اور تعدادا لا نہایت سے صفر تک گہٹتا ہی

اسیطرح سے مماس التمام کے تغیرات کی تحقیقات ہو سکتی ہے

(۵۹) زاویہ کے قاطع الزاویہ کے اون تغیرات کو تحقیق کرو جو زاویہ کے متغیر ہونے سے واقع ہوتے ہین

زاویہ کے قاطع الزاویہ کے تغیرات کی بہی تحقیقات دو ترکیبون سے ہو سکتی ہی ایک ترکیب تو وہی جو جیب اور جیب التمام اور مماس کی بیان ہوئی ہے دوسری ترکیب یہہ ہے کہ صورت قانونی قطع ا ب = $\frac{1}{\text{جم ع ا ب}}$ سے یہہ نتیجہ نکالین کہ جو جو تغیرات جیب التمام کے تحقیق ہو چکے ہین اوسے قاطع الزاویہ کے تغیرات کو بہی معلوم کر لین اب اس اخیر ترکیب کو ہم اختیار کرتے ہین

کہ جب زاویہ ۰ سے ۹۰° تک بڑہتا ہی تو جیب التمام اسی ۰ تک گہٹتی ہے تو قاطع الزاویہ ۱ سے بے حد و نہایت بڑہتا ہے اسواسطے قاطع الزاویہ ۹۰° کو لا نہایت کہتے ہین اور جب زاویہ ۹۰° سے ۱۸۰° تک بڑہتا ہی تو جیب التمام منفی ہوتی ہے اور تعداداً ۰ سے ۱ تک بڑہتی ہے پس قاطع الزاویہ منفی ہوا اور تعداداً لا نہایت سے ۱ تک گہٹتا جاتا ہی اور جب زاویہ ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑہتا ہی تو جیب التمام منفی ہوتی ہے اور تعداداً ۱ سے ۰ تک گہٹتا ہی پس قاطع الزاویہ منفی ہوتا ہے اور تعداداً ۱ سے لا نہایت تک زیادہ ہوتا ہے اور جب زاویہ ۲۷۰° سے ۳۶۰° تک بڑہتا ہی تو جیب التمام مثبت ہوتی ہے اور متواتر ۰ سے ۱ تک بڑہتا ہے پس قاطع الزاویہ مثبت ہوتا ہے اور متواتر لا نہایت سے ایک تک گہٹتا ہے

اسیطرح قاطع التمام زاویہ کا بیان ہوسکتا ہے

(۶۰) چونکہ جع ا = ۱ − جم ا تو زاویہ ۰ سے ۱۸۰° تک زیادہ ہوتا ہے اور جیب معکوس ۰ سے ۲ تک بڑہتا ہے اور جب زاویہ ۱۸۰° سے ۳۶۰° تک بڑہتا ہی تو جیب معکوس ۲ سے ۰ تک گہٹتی ہے

(۶۱) پس اب اوپر کے بیان سے یہہ علم ہوتا ہے کہ جیب اور جیب التمام کی قیمت −۱ اور +۱ کے درمیان ہوتی ہے اور مماس اور مماس التمام کی قیمت −∞ اور +∞ کے درمیان ہوتی ہے اور قاطع الزاویہ اور قاطع التمام کی قیمت −∞ اور −۱ کے درمیان اور +۱ اور +∞ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور یہہ بھی ظاہر ہوتا ہے کہ کسی علم مثلثی نسبت کی علامت مین تغیر نہین واقع ہوتا ہی جب تک کہ صفر اور لا نہایت پر اوسکی نوبت نہین پہونچتی اور جیب معکوس ہمیشہ مثبت ہوتی ہے اور اوسکی قیمت ۰ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہے

(۶۲) اس باب اور باب گذشتہ سے جو خاص زاویونکی علم شلثی نسبتون کی قیمت دریافت ہوئی ہے اون سے یہہ جدول مرتب کرکے لکھتے ہین

	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۱۸۰°
جیب	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
جیب التمام	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	-۱
مماس	۰	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	$-\sqrt{۳}$	-۱	$-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۰
مماس التمام	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۰	$-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	-۱	$-\sqrt{۳}$	∞
قاطع الزاویہ	۱	$\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	$\sqrt{۲}$	۲	∞	-۲	$-\sqrt{۲}$	$-\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	-۱
قاطع التمام	∞	۲	$\sqrt{۲}$	$\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	۱	$\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	$\sqrt{۲}$	۲	∞

امثلہ

(۱) علم شلثی نسبتین زاویہ ۵۸۵° کی دریافت کرو

(۲) زاویہ ۶۹۰° کی

(۳) زاویہ ۹۳۰° کی

(۴) زاویہ ۶۴۲۰° کی

(۵) تمام زاویے جو ۰ اور ۹۰۰° کے درمیان واقع ہون اور ارتباط مس بر = ۱ کی شرائط کو پورا کرین دریافت کرو

(۶) جو زاویے کہ ارتباط جم بر = $\frac{۱}{۲}$ کی شرائط کو پورا کرین اونکو ۰ اور ۹۰۰° کے درمیان دریافت کرو

(۷) اور جیب معکوس $\frac{\text{ن کہ}}{\text{۲ہ}}$ کی قیمتین دریافت کرو جب ن صحیح عدد ہو

(۸) جب $\left[\frac{ن \pi}{۲} + (-۱)^{ن} \frac{\pi}{۶}\right]$ کی قیمتین دریافت کرو جب ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو

(۹) مساوات جب^{۳} بر + جم^{۳} بر = ۰ کو حل کرو

(۱۰) مساوات ۲ جب^{۲} بر − ۵ جم بر − ۴ = ۰ کو حل کرو

(۱۱) جب اور جم بر − جب بر کی علامتون کی تغیرات کو اوس صورتمین دریافت کرو کہ جبکہ صفر اور ۲ کہ کے درمیان بر بدلتا ہو

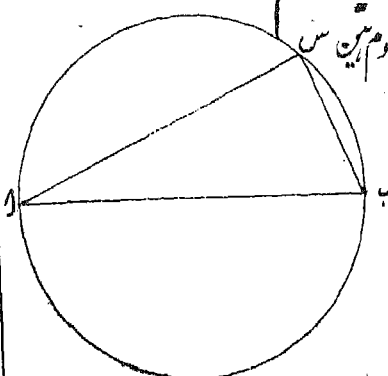
(۱۲) جم^{۲} بر − جب^{۲} بر کے بہی

(۱۳) مس بر + مم بر کے بہی

(۱۴) مساوات قط^{۲} بر $= \frac{۴ \text{ ط ص}}{(\text{ط + ص})^{۲}}$ ممکن ہے

باب پنجم

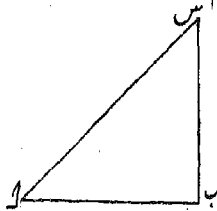
زاویے جنکے علم شلثی نسبتین معلوم ہین

(۶۵) ایک زاویہ بناؤ جسکی جیب یا جیب التمام معلوم ہے

مطلوب یہہ ہے کہ ایک زاویہ بنائین جسکی جیب ایک مقدار معلوم ط ہو ایک دائرہ بناؤ جسکا قطر ایک ہو اور کوئی قطر اب اس دائرہ کا کہینچو اور ب کے مرکز اور ط کے نصف قطر سے دائرہ بناؤ جو پہلے دائرہ سے نقطہ س پر ملے اور ب س اور ا س ملاؤ تو زاویہ ا س ب قائمہ ہوگا اور جیب ب ا س کی ب س / ا ب یعنی ط ہوگی اسواسطے ب ا س زاویہ مطلوب ہے اگر زاویہ مطلوب کی جیب التمام ط ہو تو شکل اسیطرح بنالو زاویہ ا ب س زاویہ مطلوب ہوگا

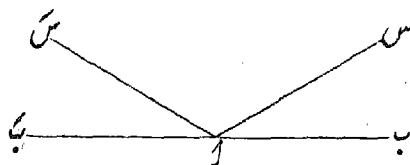
(۶۶) ایک زاویہ بناؤ جسکا مماس یا مماس التمام معلوم ہے

مطلوب یہہ ہے کہ زاویہ ایسا بنائین کہ جسکا مماس ایک مقدار معلوم ط ہو

ایک خط ا ب مقرر کرو جسکا طول ایک ہو اور ب س زاویے قائمے بناتا ہوا ا ب سے طول مین برابر ط کے بناؤ اور س ا ملاؤ پس مماس ب ا س کا ب س / ا ب یعنی ط ہی اسیواسطے ب ا س زاویہ مطلوب ہے

اگر زاویہ مطلوب کا مماس التمام ط ہو تو شکل پہلی طرح سے بناؤ ا س ب زاویہ مطلوب ہوگا

(۶۵) اگر زاویہ ایسا بنانا ہو کہ اوسکا قاطع التمام معلوم ہو تو اس سبب سے کہ قاطع التمام متکافی جیب کا ہوتا ہی اوسکی جیب معلوم ہوگی اور جب جیب معلوم ہوئی تو زاویہ بموجب دفعہ ۶۳ کے بن سکتا ہی اور ایسے ہی اگر زاویہ ایسا بنانا ہو کہ اوسکا قاطع الزاویہ معلوم ہو تو اس سبب سے کہ قاطع الزاویہ متکافی جیب التمام کا ہوتا ہی جیب التمام معلوم ہوگی اور جب جیب التمام معلوم ہوئی تو زاویہ بموجب دفعہ ۶۳ کے بن سکتا ہے

اب ہم وہ جملے بیان کرینگے جنمین وہ سب زاویے شامل ہین جنکے علم مثلثی نسبت معلوم ہے آگے اس سارے باب مین ہم زاویونکو مقیاس قوس کے موافق تعبیر کرینگے

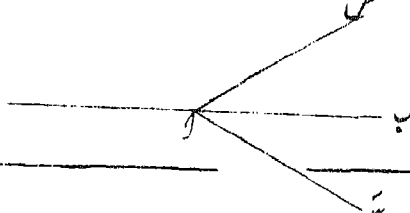
(۶۶) اون سب زاویون کے لئے جنکے ایک ہی جیب معلوم ہے ایک جملہ دریافت کرو فرض کرو کہ ب ا س چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ ہو جو جیب معلوم رکھتا ہی

اس زاویہ کو α سے تعبیر کرو اور ب ا کو نقطہ ب تک خارج کرو اور زاویہ ب ا س = ب ا س کے بناؤ تو ب ا س = $\pi - \alpha$

اب شکل سے ظاہر ہے کہ ـ سہ اور وہ زاویے جو سہ اور کہ ـ سہ پر چار قائمون کے اضعاف صحیح کے زیادہ کرنے سے بنتے ہین مثبت زاویے ایسے ہین کہ جنکے جیب وہی ہے جو سہ کی جیب ہے اور سوا انکے کوئی اور مثبت زاویہ ایسا نہین ہے کہ اوسکی جیب وہی ہو جو سہ کی جیب ہے یعنی وہ سب زاویے صورت ۲ن کہ + سہ اور ۲ن کہ + کہ ـ سہ مین داخل ہین اسمین ن صفر یا کوئی صحیح عدد ہے اور نیز صرف منفی زاویے جنکی جیب وہی ہے جو سہ کی جیب ہے ـ (کہ + سہ) اور ـ (۲ کہ ـ سہ) اور زاویے جو ان زاویون پر منفی چار قائمون کے اضعاف سے بنتے ہین یعنی وہ سب زاویے جو صورت ۲ن کہ ـ (۲ کہ + سہ) اور ۲ن کہ ـ (۲کہ ـ سہ) مین داخل ہین جسمین ن صفر یا کوئی منفی صحیح عدد ہے امتحان سے معلوم ہوگا کہ کل زاویے جو اوپر بیان ہوئے وہ اس صورت

ن کہ + (ـ ۱)^ن سہ

مین داخل ہین جسمین ن صفر یا کوئی مثبت منفی صحیح عدد ہے اور نیز تمام زاویے جو اس جملہ مین داخل ہین وہ اون زاویون مین سے ہونگے جو اوپر بیان ہوئے پس وہ سب زاویے جنکی جیب وہی ہے جو سہ کی جیب ہے اس صورت ن کہ + (ـ ۱)^ن سہ مین داخل ہین اور زاویے جو اس صورت مین داخل ہین اونکے جیب وہی ہے جو سہ کی جیب ہے

اس صورت سے وہ زاویے بہی تحقیق ہو جاتے ہین جنکا قاطع التمام ایک ہی ہے،

(۶۷) اون سب زاویون کے لئے جنکے ایک ہی جیب التمام معلوم ہے ایک جملہ دریافت کرو فرض کرو کہ ب ا س کم از کم مثبت زاویہ ایسا ہے جو جیب التمام معلومہ رکہتا ہے اور اس زاویہ کو سہ سے تعبیر کرو اور زاویہ ب ا س َ = ب ا س کے بناؤ اب شکل سے ظاہر ہے کہ

س

ب

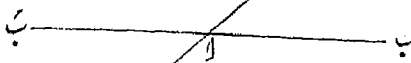
ا

سَ

صرف مثبت زاویے جنکے جیب التمام وہی ہے جو سہ کی جیب التمام ہے ۲ کد + سہ اور وہ زاوی ہین جو چار قائمون کے اضعاف صحیح کے زیادہ کرنے سے بنتے ہین یعنی وہ زاویے جو صورت ۲ ن کد + سہ اور ۲ ن کد + کد ـ سہ مین داخل ہین اسمین ن صفر یا کوئی مثبت عدد ہے اور صرف منفی زاویے جنکی جیب التمام وہی ہے جو سہ کی جیب التمام ہے ـ سہ اور ـ (۲ کد ـ سہ) اور وہ زاویے ہین جو ان زاویون پر منفی چار قائمون کے اضعاف صحیح کے زیادہ کرنے سے بنتے ہین یعنی زاویے جو صور ۲ ن کد ـ سہ اور ۲ ن کد ـ (۲ کد ـ سہ) مین داخل ہین اسمین ن صفر یا کوئی مثبت منفی صحیح عدد ہے اور امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ یہہ سب زاویے جو اوپر مذکور ہوئے اس صورت ۲ ن کد ± سہ

مین داخل ہین : اسمین ن صفر یا کوئی مثبت منفی صحیح عدد ہے اور نیز جو زاویے اس صورت مین داخل ہین وہ اون زاویون مین سے ہونگے جو اوپر بیان ہوئے پس سب زاویے جنکی جیب التمام وہی ہے جو سہ کی جیب التمام ہے اس صورت مین ۲ ن کد ± سہ مین داخل ہین اور جو زاویے اس صورت مین داخل ہین اونکی جیب التمام وہی ہے جو سہ کی جیب التمام ہے اسی صورت سے وہ سب زاویے بھی تحقیق ہوجاتے ہین جنکا قاطع وہی ہے جو سہ کا قاطع ہے

(۶۸) اون سب زاویون کے لئے جنکا ایک ہی مماس ہے ایک جملہ دریافت کرو

فرض کرو کہ ب ا س چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ ہے جو مماس معلوم رکھتا ہے اوسکو سہ سے تعبیر کرو اور ب ا کو بَ تک اور س ا کو سَ تک بڑہاؤ

اب شکل سے ظاہر ہے کہ صرف مثبت جنکا مماس وہی ہے جو سہ کا مماس ہے کد + سہ اور وہ زاویے ہین جو سہ اور کد + سہ پر چار قائمون کے اضعاف زیادہ کرنے سے پیدا ہوتے ہین یعنی وہ سب

زاویے ہین جو صورت ۲ ن کہ + سہ اور ۲ ن کہ + کہ + سہ مین داخل ہین اسمین ن صفر یا کوئی مثبت صحیح ہے
اور صرف منفی زاویے جنکا مماس وہی ہے جو سہ کا مماس ہے - (کہ - سہ) اور - (۲ کہ - سہ)
اور وہ زاویے ہین جو منفی چار قائمون کے اضعاف صحیح ان زاویون پر زیادہ کرنے سے بنے ہین یعنی وہ
زاویے جو صورت ۲ ن کہ - (کہ - سہ) اور ۲ ن کہ - (۲ کہ - سہ) مین داخل ہین اور اسمین ن
صفر یا کوئی منفی صحیح عدد ہے پس کل زاویے جو اوپر بیان ہوئے وہ امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ
اس صورت   ن کہ + سہ
مین داخل ہین اسمین ن صفر یا کوئی منفی مثبت صحیح عدد ہے اور نیز جو زاویے اس صورت مین داخل ہین وہ زوایۂ
مذکورہ مین ضرور پائی جائینگی پس وہ سب زاویے جنکا مماس وہی ہو جو سہ کا مماس ہے اس صورت مین
ن کہ + سہ مین داخل ہین اور جو زاویے اس صورت مین داخل ہین اونکا مماس وہی ہے جو سہ کا مماس ہے
اسی صورت سے وہ زاویے بہی تحقیق ہو جاتے ہین جنکا مماس التمام ایک ہی ہو

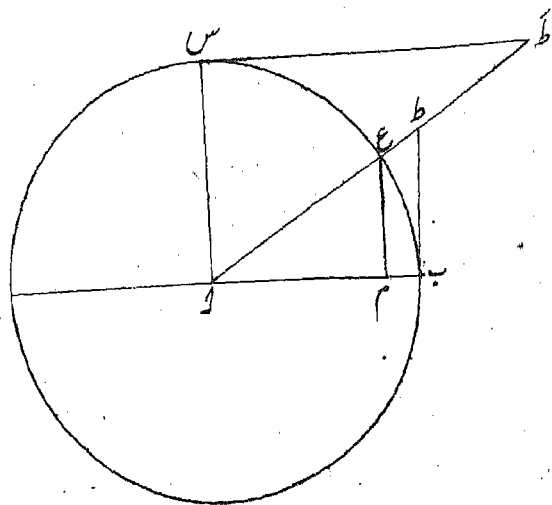
(۶۹) دفعہ ۶۶ مین ہم نے ثابت کیا ہے کہ اگر سہ چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ ایسا ہو کہ جیب معلوم
رکہتا ہو تو صورت ن کہ + $(-۱)^{ن}$ سہ مین بغیر کم و بیشی کے سب زاویے داخل ہین جنکی
جیب وہی ہے جو سہ کی ہے سہ کا مثبت زاویہ چھوٹے سے چھوٹا فرض کرنا اثبات کی صفائی
اور آسانی کے واسطے تہا ورنہ یہہ قید چھوٹی ہونے کی لگانی کچھہ ضرور نہین بلکہ بغیر اس قید کے
یہہ دعوی ثابت ہے کہ صہ خواہ کوئی سا زاویہ ہو تو صورت ن کہ + $(-۱)^{ن}$ صہ مین وہ سب زاویے
بغیر کم و بیشی کے داخل ہین جنکی جیب وہی ہے جو صہ کی جیب ہے اسواسطے کہ سہ کو ایسا چھوٹے
سے چھوٹا مثبت زاویہ فرض کرو کہ جسکی جیب برابر جیب صہ کے ہو تو جو کچھہ ثابت ہوا ہے اوسکی
موافق صورت م کہ + $(-۱)^{م}$ سہ مین جو زاویے داخل ہین منجملہ اونکے صہ بہی ایک زاویہ
ہوگا اسمین م صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے پہر فرض کرو کہ صہ = ر کہ + $(-۱)^{ر}$ سہ
اسواسطے ن کہ + $(-۱)^{ن}$ صہ = ن کہ + $(-۱)^{ن}$ ر کہ + $(-۱)^{ن+ر}$ سہ
اب صرف یہہ ثابت کرنا باقی رہا کہ اس صورت مین وہ سب زاویے بغیر کم و بیشی کے داخل ہین

جو صورت م کہ + (−۱)^م سہ مین داخل ہین اگر ن جفت ہو تو یہہ صورت مطابق م = ن + ر کے ہوگی اگر ن طاق ہو تو صورت مطابق م = ن − ر کے ہوگی اور ن کہ + (−۱)^ن صہ مین وہ سب زاویے بغیر کمی و بیشی کے داخل ہین جنکا قاطع التمام وہی ہے جو صہ کا قاطع التمام ہے

(۷۰) اسیطرح ہم ثابت کرسکتے ہین کہ خواہ صہ کوئی سا زاویہ ہو صورت ۲ ن کہ ± صہ مین وہ سب زاویے بغیر کمی و بیشی کے داخل ہین جنکی جیب التمام اور قاطع الزاویہ اور جیب معکوس وہی ہے جو صہ کی جیب التمام اور قاطع الزاویہ اور جیب معکوس ہے

اور صورت ن کہ + صہ مین وہ سب زاویے بغیر کم و بیشی کے داخل ہین جنکا مماس اور مماس التمام وہی ہے جو صہ کے مماس یا مماس التمام ہے

(۷۱) اس باب کے ختم کرنے سے پہلے ہم علم مثلثی جملون کے حدود کی طرف پھر رجوع کرتے ہین ان جملون کی کیفیت ہم نے یہہ بیان کی ہے کہ وہ مثلث قائم الزاویہ کے اضلاع کی نسبتین ہین مگر زمانہ قدیم مین اونکی تعریف اور ہی طرح سے ہوا کرتی تہی کتابون مین اونکے ذکر اور اشارے کتنا اب بہی آجاتے ہین اسلئے مناسب معلوم ہوتا ہے کہ ان حدود کا بیان موافق متقدمین کے بہی لکہا جاے تاکہ طالب علم ایسے مقامات کے مطالعہ مین عاجز نہ رہین

س ط' ط ع ب ا م

فرض کرو کہ آ مرکز اور اب نصف قطر کسی دائرہ کا ہو اور ب ع کوئی قوس اوسکی ہو نصف قطر
اس زاویے بناتا ہوا اب پر کہیچو اور ب اور س سے مماس اس دائرہ کے کہیچو اور اع کو بڑہاؤ
کہ وہ اول مماس سے نقطہ ط پر اور دوسرے مماس سے نقطہ ط پر ملے اور ع م عمود اب پر نکالو
پس متقدمین کی حدود یہہ ہین کہ وہ خطوط کو علم مثلثی جملے قوس کے کہتے ہین اور وہ شکل مین نیچے
ہوئی ہین اونکا بیان یہہ ہے کہ ع م قوس ب ع کی جیب اور ا م اوسکی جیب التمام اور ب ط اوسکا
مماس اور س ط اوسکا مماس التمام ہے اور اط قاطع القوس اور اط قاطع التمام اور ب م
جیب معکوس ہے اور جو خط ب اور ع مین ملایا جاے اوسکو وتر قوس ب ع کا کہتے ہین غرض
متقدمین جیب اور جیب التمام وغیرہا سے خاص خطوط کو تعبیر کرتے تہے متاخرین کی طرح نسبتون
سے نہین تعبیر کرتے تہے اور اونکے ہان طول جیب اور جیب التمام وغیرہا کے طول نصف قطر دائرہ پر موقوف
ہوتی تہی اسلیئے ضرور ہوا کہ ہم یہہ بیان کرین کہ وہ اس نصف قطر کا طول اپنی تحقیقات مین کیا مقرر کیا کرتے تہے
(۷۲) یہہ بات تو بڑی آسان ہے کہ قدیم اور جدید علم مثلثی جملون کی قیمتون کو آپسمین مربوط کرلین

جیب زاویہ ع اب = $\frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}}$

جیب قوس ع ب = ع م

پس جیب قوس = نصف قطر دائرہ × جیب زاویہ کے

اور جیب زاویہ = $\frac{\text{جیب قوس}}{\text{نصف قطر دائرہ}}$

اور علی ہذا القیاس اور علم مثلثی جملون مین بہی ایسی ہی نتائج نکلتے ہین
پس اسطرح سے کوئی صورت قانونی جو متاخرین کے علم مثلثی جملون مین لکہی ہوئی ہو متقدمین کے
علم مثلثی جملون مین جنمین قوسونکے جملے ہونگے تحویل ہو سکتی ہے اور بالعکس اسکے یہی عمل ہو سکتا ہے
مثلاً ا کسی زاویہ کو تعبیر کرے تو بموجب دفعہ ۳۴ کے

جیب^2 ا + جم^2 ا = ۱

اب ط قوس محاذی زاویہ ا کے اوس دائرہ مین فرض کرو جسکا نصف قطر نق ہو تو

$$\frac{\text{جب}^2\ \text{ط}}{\text{نق}^2} + \frac{\text{جم}^2\ \text{ط}}{\text{نق}^2} = ۱$$

پس $\text{جب}^2\ \text{ط} + \text{جم}^2\ \text{ط} = \text{نق}^2$

اور جیب نصف زاویہ ع ا ب کے

$$= \frac{\frac{1}{2}\ \text{ع ب}}{\text{ا ب}} = \frac{1}{2}\ \frac{\text{ع ب}}{\text{ا ب}}$$

اور اسواسطے وتر قوس کا = نصف قطر دائرہ × دوچند جیب نصف زاویہ کے

(۷۳) چونکہ قوس کی جیب برابر حاصل ضرب نصف قطر دائرہ اور جیب زاویہ کے ہوتی ہے اسلئے یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر نصف قطر دائرہ کا واحد تعداد مین فرض کرین تو دونو متاخرین اور متقدمین کے موافق جیب ایک ہی ہو جائیگی اور اسے نتائج اور علم مثلثی جملون کے واسطے استخراج ہونگے پس کوئی صورت جو نظم قدیم کے موافق مرتب ہو وہ نصف قطر کو برابر واحد کے فرض کرنے سے نظم جدید مین بیان ہو جائیگی

(۷۴) متقدمین کے حدود سے وجہ تسمیہ جیب اور قوس کی خوب معلوم ہوتی ہے قوس کمان کو کہتے ہیں اور جیب گریبان کو کہتے ہیں ظاہر دکھائی دیتا ہے کہ کمان کا گریبان چلہ کمان ہے اب دیکھو ادہا چلہ اور نصف کمان کی وہی نسبت ہے جو نصف قوس اور اوسکے جیب کی ہے اور مماس اور قاطع الزاویہ کی وجہ تسمیہ ظاہر ہے

(۷۵) اب تمام انگریزی کتابون مین متاخرین کے نظم علم مثلثی جملون کا متقدمین کے نظم پر سبقت لیگیا ہے اول اول ڈاکٹر پی کاک صاحب نے اس ترکیب کو داخل کیا ہے اور ریٹی کس نے قاطع اور قاطع التمام کو ایجاد کر کے علم مثلثی نسبتون کی جداول کو کامل کیا ہے

مثالین

(۱) مس بر = ۱ مین قیمت عامہ بر کی لکھو

(۲) جب بر = ۱ مین قیمت عامہ بر کی لکھو

(۳) جم بر = ۱ مین قیمت عامہ بر کی لکھو

(۴) جم بر = − $\frac{1}{2}$ مین قیمت عامہ بر کی لکھو

(۵) مساوات جب۲ بر = جب۲ سہ کی شرائط کو جو قیمتین بر کی پورا کرین اونکو دریافت کرو

(۶) ظم بر = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ مین قیمت عامہ بر کی دریافت کرو

(۷) مساوات جم۲ بر = جم۲ سہ کی شرائط کو جو قیمتین بر کی پورا کرین اونکو دریافت کرو

(۸) قط۲ ا = ۲ مین قیمت عامہ بر کی دریافت کرو

(۹) مساوات مس۲ بر = مس۲ سہ کی شرائط کو جو قیمتین بر کی پورا کرین اونکو دریافت کرو

(۱۰) مس بر = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ مین قیمت عامہ بر کی دریافت کرو

(۱۱) ثابت کرو کہ صورت ۲ن کہ + سہ مین وہ سب زاویئے داخل ہین جنکی جب کی وہی قیمت ہے جو جیب التمام سہ کی ہے

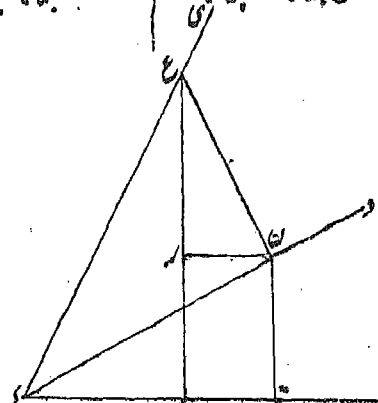
(۱۲) بر کی وہ قیمت لکھو جو ان دونو مساواتونکی شرائط کو پورا کرے

جب بر = − $\frac{1}{2}$ اور جم بر = − $\frac{\sqrt{3}}{2}$

چھٹا باب

دو زاویوں کے علم مثلثی جملے

(۷۶) دو زاویوں کے مجموعہ کی جیب اور جیب التمام کو اونکے خود جیب اور جیب التمام کی رقموں مین بیان کرو

ع، م، ن، ر، ی، د، س

زاویہ س ی د کو ا سے اور زاویہ د ی ن کو ب سے تعبیر کرو تو زاویہ س ی ن تعبیر ا + ب سے ہوگا
ی ن مین کوئی نقطہ ع کا مقرر کرو اور ع م عمود ی س پر اور ع ن عمود ی د پر اور ن ر عمود

ر ع م پر اور ن ق عمود ک س پر نکالو تو زاویہ ع ن ر تمامی زاویہ ر ن ی کے ہوگا اسواسطے ن ع ر برابر ا کے ہے　یعنی ن ک س

اب $\text{جب}\,(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{ع م}}{\text{ک ع}} = \frac{\text{ر م} + \text{ع ر}}{\text{ک ع}} = \frac{\text{ن ق}}{\text{ک ع}} + \frac{\text{ع ر}}{\text{ک ع}}$

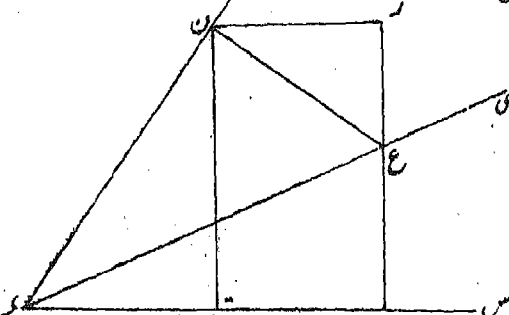
$= \frac{\text{ن ق}}{\text{ک ن}} \cdot \frac{\text{ک ن}}{\text{ک ع}} + \frac{\text{ع ر}}{\text{ع ن}} \cdot \frac{\text{ع ن}}{\text{ک ع}}$

$= \text{جب ا جم ب} + \text{جم ا جب ب}$

$\text{جم}\,(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{ک م}}{\text{ک ع}} = \frac{\text{ک ق} - \text{ق م}}{\text{ک ع}} = \frac{\text{ک ق}}{\text{ک ع}} - \frac{\text{ن ر}}{\text{ک ع}}$

$= \frac{\text{ک ق}}{\text{ک ن}} \cdot \frac{\text{ک ن}}{\text{ک ع}} - \frac{\text{ن ر}}{\text{ن ع}} \cdot \frac{\text{ن ع}}{\text{ک ع}}$

$= \text{جم ا جم ب} - \text{جب ا جب ب}$

(۷۷) دو زاویوں کے مجموعہ اور حاصل تفریق کے جیب التمام خود اون زاویوں کی جیب اور جیب التمام کی رقموں میں بیان کرو

فرض کرو کہ زاویہ س ک ی کا ا سے اور زاویہ د ک ی کا ب سے تعبیر ہوتا ہے تو زاویہ س ک ی کی تعبیر ا ـ ب سے ہوگا ک ی میں کوئی نقطہ ع کا مقرر کرکے ع م عمود ک س پر اور ع ن عمود ک د پر اور ن ر عمود ع م ممدودہ پر اور ن ق عمود ک س پر نکالو تو زاویہ ع ن ر تمامی زاویہ ع ن ق کی ہوگی اور اسواسطے برابر ک ن ق کے ہوگی اسواسطے ن ع ر برابر ا کے ہوگا

اب $\text{جب}\,(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{ع م}}{\text{ک ع}} = \frac{\text{ر م} - \text{ر ع}}{\text{ک ع}} = \frac{\text{ن ق}}{\text{ک ع}} - \frac{\text{ر ع}}{\text{ک ع}}$

$= \frac{\text{ن ق}}{\text{ک ن}} \cdot \frac{\text{ک ن}}{\text{ک ع}} - \frac{\text{ر ع}}{\text{ع ن}} \cdot \frac{\text{ع ن}}{\text{ک ع}}$

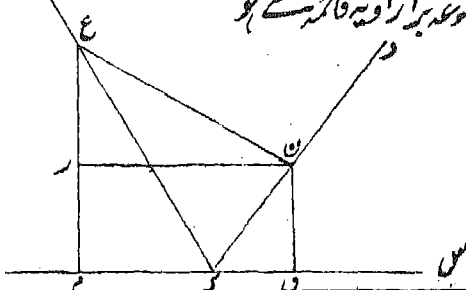
= جب ا جم ب − جم ا جب ب

جم (ا − ب) = ی م / ی ع = (ی ق + ق م) / ی ع = ی ق / ی ع + ن ر / ی ع

= ی ق / ی ن · ی ن / ی ع + ن ر / ع ن · ع ن / ی ع

= جم ا جم ب + جب ا جب ب

(۷۸) اوپر جو اثبات بیان ہوئے ہین وہ اس بات کو ذہن مین رکہنے سے بآسانی یاد رہ سکتے ہین کہ نقطہ ع کا جب (ا + ب) اور جم (ا + ب) کے صورتون مین تو اوس خط مین لیا گیا ہی جو زاویہ ا + ب کو احاطہ کرتا ہی اور جب (ا − ب) اور جم (ا − ب) کے صورتون مین نقطہ ع کا اوس خط مین لیا گیا ہے کہ زاویہ ا − ب کو احاطہ کرتا ہے پس جب شکل بن جاتی ہو تو بڑا مقدمہ اثبات مین یہہ ہے کہ زاویہ ن ع ر برابر زاویہ ا کے ہی وہ عمل شکل سے خود ہی ظاہر ہو جائیگا کہ خطوط ع ن اور ر ع عمود اون خطون پر ہین جیسے کہ زاویہ ا بنا ہی اسواسطے وہ زاویہ برابر ا کے بناتے ہین

(۷۹) دفعات ۷۶ و ۷۷ مین جو صور قانونی بیان ہوئین اونمین زاوئیے ا اور ب ہر مقدار کے ہو سکتے ہین طالب علم اونکے مختلف صورتون مین بنا بنا کر شکلین کہینچین اور دعوی کو ثابت کرے فقط ان اختلافات مین جس بات کا فرق پڑیگا وہ یہہ ہوگا کہ بعض صورتون مین عمود خطوط مستقیم پر واقع ہونگے اور بعض صورتون خطوط مستقیم ممدودہ پر اب ہم مثال کے طور پر دفعہ ۷۶ کی صورت قانونی کو اوس حالت مین ثابت کرتے ہین کہ زوایا ا اور ب مین سے ہر یک چہوٹا زاویہ قائمہ سے ہو مگر اوسکا مجموعہ بڑا زاویہ قائمہ سے ہو

غرض کرو کہ زاویہ س ء د کا ا سے اور زاویہ د ء ی کا ب سے تعبیر ہوتا ہے تو زاویہ س ء ی کا ا + ب سے تعبیر ہوتا ہے ء ی میں کوئی نقطہ ع کا مقرر کرو اور ع م عمود س ء محدودہ پر اور ع ن عمود ء د پر کھینچو اور ن ر عمود ع م پر اور ن ق عمود ء س پر لگاؤ تو زاویہ ع ن ر تمامی زاویہ ن ء ی کی یعنی ن ء س کی ہوگی اسواسطے ن ع ر برابر ا کے ہوگا

اب جب (ا + ب) = ع م / ء ع = (م ر + ر ع) / ء ع = ن ق / ء ع + ع ر / ء ع

= ن ق / ء ن . ء ن / ء ع + ع ر / ع ن . ع ن / ء ع

= جب ا جم ب + جم ا جب ب

اور نیز جم (ا + ب) = ء م / ء ع

یہاں ہمکو یہہ بات یاد رکھنی چاہئے کہ ء م جانب جنوب میں ء کے اندازہ ہوا ہے اسلئے ایک مقدار منفی ہے اور ہم اوس جگہہ ء ق ـ ق م یعنی ء ق ـ ن ر رکھہ سکتے ہیں پس

جم (ا + ب) = (ء ق ـ ن ر) / ء ع = ء ق / ء ع ـ ن ر / ء ع

= ء ق / ء ن . ء ن / ء ع ـ ن ر / ع ن . ع ن / ء ع

= جم ا جم ب ـ جب ا جب ب

(۸۰) دفعات ۷۶ و ۷۷ میں جو صور قانونیہ ثابت ہوئین ہیں وہی اصل اصول اس علم کی ہیں اور اونکو اصول قوانین علم مثلثی کہتے ہیں اسواسطے ضرور ہے کہ اونکا عامہ ہونا بتلایا جاوے اور دکھلایا جاوے دفعہ گذشتہ میں ہمنے ایک صورت لکھدی طالب علم اسیطرح سے سب اختلافات خود لکھکر سب صورتین ثابت کرلے اور اونکے عامہ ہونیکی امتحان کی تصدیق کرلے مگر بعض مسائل ہم ثابت کرآئے اون سے باسانی تمام نتائج مطلوب کا اثبات حقیقیہ اور قطعیہ کرسکتے ہیں جو صور قانونی ہمکو ثابت کرتے ہیں وہ یہہ ہیں

جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب (۱)

جم (ا + ب) = جم ا جم ب ـ جب ا جب ب (۲)

جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب (۳)

جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب (۴)

اب دفعات ۷۶ اور ۷۹ مین ہم نے ثابت کیا ہے کہ (۱) اور (۲) اون سب زاویون پر حاوی ہین جنمین ا اور ب کی مثبت قیمتین ہین اور کوئی قائمہ سے بڑی نہین اور دفعہ ۷۵ مین ہمنے (۳) اور (۴) کو ثابت کیا ہے کہ وہ اون سب زاویون پر حاوی ہین جنمین ا اور ب کی مثبت قیمتین قائمہ سے بڑی نہین اور ا بڑا ب سے ہے اول ہم یہہ ثابت کرینگے کہ ا کی بڑے ہونیکی قید (۳) اور (۴) مین کچھہ ضرور نہین

بموجب دفعہ ۶۴ جب (ا - ب) = - جب (ب - ا)

جم (ا - ب) = جم (ب - ا)

پس اگر ہم اس بات کو جانتے ہین کہ

جب (ب - ا) = جب ب جم ا - جم ب جب ا

اور جم (ب - ا) = جم ب جم ا + جب ب جب ا

تو ہم یہہ بہی جانتے ہین کہ

جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

اسواسطے اگر (۳) اور (۴) حاوی اون ا اور ب کی قیمتون پر ہین جو مابین کسی حدود کے واقع ہون اور ا بڑا ب سے ہو تو وہ ا اور ب کی اون قیمتون پر بہی حاوی ہونگین کہ مابین حدود مذکورہ کے واقع ہون اور ا چہوٹا ب سے ہو

پس اسے ہمکو معلوم ہوگیا کہ چارون صور قانونی صحیح اور درست اون قیمتون کی لی ہین کہ جنمین ب کسی زاویہ صفر اور قائمہ کے درمیان واقع ہو اور مثبت ہو اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ اگر صور قانونی ا اور ب کی اون قیمتون کے واسطے درست ہین کہ خاص حدون کے درمیان واقع ہین

تو یہہ حدین بقدر ایک قائمہ کے زیادہ ہوسکتی ہین اسواسطے کہ بموجب دفعہ ۵۲ کے

جب (۹۰ + ا + ب) = جم (ا + ب) = جم ا جم ب − جب ا جب ب

= جب (۹۰ + ا) جم ب − جب (۹۰ + ا) جب ب

پس اسطرح اگر (۲) کسی حدون کے واسطے صحیح ہو تو اوسے (۱) کے صداقت کو ہر یک زاویہ کے حد پر ۹۰ زیادہ کر کے ثابت کر سکتے ہین اور علی ہذا القیاس یہی کیفیت اور صور قانونیہ کی ہین اور اسیطرح سے ہم جہانتک چاہین زاویون کی حدون کو زیادہ کر سکتے ہین اب آخر بات یہہ ہے کہ یہی قانونیہ منفی زاویون کے واسطے بہی قائم ہوسکتے ہین فرض کرو کہ ا اور ب دونو منفی ہون ا = − اَ اور ب = − بَ تو

جب (ا + ب) = جب (− اَ − بَ) = − جب (اَ + بَ) بموجب دفعہ ۴۹

= − (جب اَ جم بَ + جم اَ جب بَ)

= جب (− اَ) جم (− بَ) + جم (− اَ) جب (− بَ)

= جب ا جم ب + جم ا جب ب

علی ہذا القیاس اور صور قانونیہ کی بہی اسیطرح تصدیق ہو جائیگی جب دونو زاویے منفی ہون یا ایک زاویہ زاویون مین سے منفی ہو

(۸۱) یہہ چار صور قانونیہ جو ہم نے لکہے ہین اون سے بہت صور قانونیہ مستنبط ہوسکتی ہین اونمین سے چند بطور تمثیل کے ہم لکہتے ہین

(۸۲) جب (ا + ب) اور جم (ا + ب) کے جملون مین ب = ا کے رکہو تو

جب ۲ ا = ۲ جب ا جم ا

جم ۲ ا = جم^۲ ا − جب^۲ ا = ۱ − ۲ جب^۲ ا = ۲ جم^۲ ا − ۱

پس ۱ + جم ۲ ا = ۲ جم^۲ ا

۱ − جم ۲ ا = ۲ جب^۲ ا

اور (۱ − جم ۲ ا) / (۱ + جم ۲ ا) = مس ۲ ا

(۸۳) چاروں صور اضوائی سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جب (ا + ب) + جب (ا − ب) = ۲ جب ا جم ب

جب (ا + ب) − جب (ا − ب) = ۲ جم ا جب ب

جم (ا + ب) + جم (ا − ب) = ۲ جم ا جم ب

جم (ا − ب) − جم (ا − ب) = ۲ جب ا جب ب

فرض کرو ا + ب = س اور ا − ب = د اسواسطے

ا = ½ (س + د) اور ب = ½ (س − د) پس

جب س + جب د = ۲ جب (س + د)/۲ جم (س − د)/۲

جب س − جب د = ۲ جم (س + د)/۲ جم (س − د)/۲

جم د − جم س = ۲ جب (س + د)/۲ جب (س − د)/۲

(۸۴) جب (ا + ب) جب (ا − ب)

= (جب ا جم ب + جم ا جب ب) (جب ا جم ب − جم ا جب ب)

= جب^2 ا جم^2 ب − جم^2 ا جب^2 ب

= جب^2 ا (۱ − جب^2 ب) − (۱ − جب^2 ا) جب^2 ب

= جب^2 ا − جب^2 ب

اور جم (ا + ب) جم (ا − ب)

= (جم ا جم ب − جب ا جب ب) (جم ا جم ب + جب ا جب ب)

= جم^2 ا جم^2 ب − جب^2 ا جب^2 ب

= جم^2 ا (۱ − جب^2 ب) − (۱ − جم^2 ا) جب^2 ب

= جم^2 ا − جب^2 ب = جم^2 ب − جب^2 ا

(۸۵) $$\text{مس}\,(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{جب}\,(\text{ا}+\text{ب})}{\text{جم}\,(\text{ا}+\text{ب})} = \frac{\text{جب ا جم ب} + \text{جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب} - \text{جب ا جب ب}}$$

آخر جملہ کے شمار کنندہ اور نسب نما کو جم ا جم ب پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا

$$\frac{\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}{1 - \frac{\text{جب ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب}}}$$

اسواسطے $$\text{مس}\,(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{1 - \text{مس ا مس ب}}$$

فرض کرو کہ ب = ا تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{مس}\,2\text{ا} = \frac{2\,\text{مس ا}}{1 - \text{مس}^2\,\text{ا}}$$

$$\text{مس}\,(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{جب}\,(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\,(\text{ا}-\text{ب})} = \frac{\text{جب ا جم ب} - \text{جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب} + \text{جب ا جب ب}}$$

$$= \frac{\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} - \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}{1 + \frac{\text{جب ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب}}} = \frac{\text{مس ا} - \text{مس ب}}{1 + \text{مس ا مس ب}}$$

تمثیلاً فرض کرو کہ ب = ۴۵° اسلئے مس ب = ۱ تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{مس}\,(\text{ا} + 45^\circ) = \frac{1 + \text{مس ا}}{1 - \text{مس ا}}$$ اور $$\text{مس}\,(\text{ا} - 45^\circ) = \frac{\text{مس ا} - 1}{\text{مس ا} + 1}$$

(۸۶) $$\text{مم}\,(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{جم}\,(\text{ا}+\text{ب})}{\text{جب}\,(\text{ا}+\text{ب})} = \frac{\text{جم ا جم ب} - \text{جب ا جب ب}}{\text{جب ا جم ب} + \text{جم ا جب ب}}$$

$$= \frac{\frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} \cdot \frac{\text{جم ب}}{\text{جب ب}} - 1}{\frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} + \frac{\text{جم ب}}{\text{جب ب}}} = \frac{\text{مم ا مم ب} - 1}{\text{مم ا} + \text{مم ب}}$$

فرض کرو کہ ب = ا تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا

$$\text{مم}\,2\text{ا} = \frac{\text{مم}^2\,\text{ا} - 1}{2\,\text{مم ا}}$$

علیٰ ہذا القیاس $$\text{مم}\,(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{مم ا مم ب} + 1}{\text{مم ب} - \text{مم ا}}$$

(۸۷) $\text{جب ۲ا} = \text{۲ جب ا جم ا} = \frac{\text{۲ جب ا جم ا}}{\text{جب}^2\text{ا} + \text{جم}^2\text{ا}}$ (دفعات ۸۴ اور ۳۲)

آخر جملے کے نسب نما اور شمار کنندہ کو جم^2 ا پر تقسیم کرو تو یہ حاصل ہوگا

$$\frac{\frac{\text{۲ جب ا}}{\text{جم ا}}}{\frac{\text{جب}^2\text{ا}}{\text{جم}^2\text{ا}} + 1}$$

اسواسطے $\text{جب ۲ ا} = \frac{\text{۲ مس ا}}{\text{۱} + \text{مس}^2\text{ا}}$

اور نیز $\text{جم ۲ ا} = \text{جم}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ا} = \frac{\text{جم}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ا}}{\text{جم}^2\text{ا} + \text{جب}^2\text{ا}}$ (دفعات ۸۱ اور ۳۲)

$$= \frac{1 - \frac{\text{جب}^2\text{ا}}{\text{جم}^2\text{ا}}}{1 + \frac{\text{جب}^2\text{ا}}{\text{جم}^2\text{ا}}} = \frac{\text{۱} - \text{مس}^2\text{ا}}{\text{۱} + \text{مس}^2\text{ا}}$$

(۸۸) $\frac{\text{جب ا} + \text{جب ب}}{\text{جب ا} - \text{جب ب}} = \frac{\text{۲ جب}\frac{\text{ا+ب}}{2}\text{ جم}\frac{\text{ا−ب}}{2}}{\text{۲ جم}\frac{\text{ا+ب}}{2}\text{ جب}\frac{\text{ا−ب}}{2}}$ (دفعہ ۸۴)

$$= \frac{\text{مس}\frac{\text{ا+ب}}{2}}{\text{مس}\frac{\text{ا−ب}}{2}}$$

$\frac{\text{جم ا} + \text{جم ب}}{\text{جم ب} - \text{جم ا}} = \frac{\text{۲ جم}\frac{\text{ا+ب}}{2}\text{ جم}\frac{\text{ا−ب}}{2}}{\text{۲ جب}\frac{\text{ا+ب}}{2}\text{ جب}\frac{\text{ا−ب}}{2}}$ (دفعہ ۸۳)

$$= \text{مم}\frac{\text{ا+ب}}{2}\text{ مم}\frac{\text{ا−ب}}{2}$$

(۸۹) $\text{مس ا} + \text{مس ب} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}} = \frac{\text{جب ا جم ب} + \text{جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب}}$

$$= \frac{\text{جب (ا + ب)}}{\text{جم ا جم ب}}$$

علی ہذا القیاس $\text{مس ا} - \text{مس ب} = \frac{\text{جب (ا − ب)}}{\text{جم ا جم ب}}$

(۹۰) $\text{مس ا} + \text{مم ا} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{جب}^2\text{ا} + \text{جم}^2\text{ا}}{\text{جم ا جب ا}}$

$$= \frac{1}{\text{جب ا جم ا}} = \frac{2}{\text{۲ جب ا جم ا}} = \frac{2}{\text{جب ۲ ا}}$$

مس ا − مم ا = جب ا / جم ا − جم ا / جب ا = (جب۲ ا − جم۲ ا) / (جب ا جم ا)

= − جم ۲ ا / (جب ا جم ا) = − ۲ جم ۲ ا / جب ۲ ا = − ۲ مم ۲ ا

(۹۱) جب ۳ ا = جب (۲ ا + ا) = جب ۲ ا جم ا + جم ۲ ا جب ا

= ۲ جب ا جم۲ ا + (۱ − ۲ جب۲ ا) جب ا

= ۳ جب ا − ۴ جب۳ ا

جم ۳ ا = جم (۲ ا + ا) = جم ۲ ا جم ا − جب ۲ ا جب ا = (۲ جم۲ ا − ۱) جم ا − ۲ جم ا جب۲ ا

= (۲ جم۲ ا − ۱) جم ا − ۲ جم ا (۱ − جم۲ ا)

= ۴ جم۳ ا − ۳ جم ا

اس سے معلوم ہوا کہ مس ۳ ا = جب ۳ ا / جم ۳ ا = (۳ جب ا − ۴ جب۳ ا) / (۴ جم۳ ا − ۳ جم ا)

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو جم۳ ا پر تقسیم کرو

مس ۳ ا = (۳ مس ا / جم۲ ا − ۴ مس۳ ا) / (۴ − ۳ / جم۲ ا)

= (۳ مس ا (۱ + مس۲ ا) − ۴ مس۳ ا) / (۴ − ۳ (۱ + مس۲ ا)) بموجب دفعہ ۳۴

= (۳ مس ا − مس۳ ا) / (۱ − ۳ مس۲ ا)

(۹۲) ۱۵° اور ۷۵° کے زاویوں کی علم مثلثی نسبتوں کی قیمتیں دریافت کرو

جب ۱۵° = جب (۴۵° − ۳۰°) = جب ۴۵° جم ۳۰° − جم ۴۵° جب ۳۰° = (√۳ − ۱) / (۲ √۲)

جم ۱۵° = جم (۴۵° − ۳۰°) = جم ۴۵° جم ۳۰° + جب ۴۵° جب ۳۰° = (√۳ + ۱) / (۲ √۲)

مس ۱۵° = جب ۱۵° / جم ۱۵° = (√۳ − ۱) / (√۳ + ۱) = (√۳ − ۱)۲ / ۲ = ۲ − √۳

مم ۱۵° = جم ۱۵° / جب ۱۵° = (√۳ + ۱) / (√۳ − ۱) = (√۳ + ۱)۲ / ۲ = ۲ + √۳

قط ۱۵° = ۱ / جم ۱۵° = ۲ √۲ / (۱ + √۳) ، قم ۱۵° = ۱ / جب ۱۵° = ۲ √۲ / (√۳ − ۱)

جب ۷۵° = جم ۱۵° = (۱ + √۳)/(۲√۲) اور جم ۷۵° = جب ۱۵° = (√۳ − ۱)/(۲√۲)

مس ۷۵° = مم ۱۵° = ۲ + √۳ اور مم ۷۵° = مس ۱۵° = ۲ − √۳

قط ۷۵° = قم ۱۵° = ۲√۲/(√۳ − ۱) اور قم ۷۵° = قط ۱۵° = ۲√۲/(۱ + √۳)

(۹۳) اگر جب ا = جب ب اور جم ا = جم ب تو ا اور ب
کیا برابر ہونگے یا اونمین تفاوت بعض اضعاف چار قائمون کا ہوگا

اسواسطے جم (ا − ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب
= جم² ا + جب² ا = ۱

اسواسطے ا − ب = ۰ یا چار قائمونکے اضعاف مثبت یا منفی کے بموجب دفعہ ۶۷ کے

(۹۴) اگر جم ا = جم ب اور جب ا = − جب ب تو ا + ب صفر ہی یا اضعاف
مثبت منفی چار قائمون کا ہے

اسواسطے کہ ارتباطات معلوم کو اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ
جم ا = جم (− ب) اور جب ا = جب (− ب) بموجب دفعہ ۹۳ کے
اسواسطے بموجب دفعہ گذشتہ ا − (− ب) یعنی ا + ب صفر ہی یا اضعاف مثبت منفی چار قائمونکے

مثالیں

ان تطابقون کو ثابت کرو

(۱) (جم ا + جب ا)/(جم ا − جب ا) = مس ۲ ا + قط ۲ ا

(۲) ۲ جب² ا جب² ب + ۲ جم² ا جم² ب = ۱ + جم ۲ ا جم ۲ ب

(۳) مس (۴۵° + ا) − مس (۴۵° − ا) = ۲ مس ۲ ا

(۴) جب ۳ ا . قم ا − جم ۳ ا قط ا = ۲

(۵) ۳ جب ا − جب ۳ ا = ۲ جب ا (۱ − جم ۲ ا)

(۶) (جب ا + ۲ جب ۳ا + جب ۵ا) / (جب ۳ا + ۲ جب ۵ا + جب ۷ا) = جب ۳ا / جب ۵ا

(۷) جب ب / جب ا = جب (۲ا + ب) / جب ا − ۲ جم (ا + ب)

(۸) جب ۴ا = ۴ جب ا جم³ ا − ۴ جم ا جب³ ا

(۹) (جم ا − جم ۳ا) / (جب ۳ا − جب ا) = مس ۲ا

(۱۰) (جم ۲ا − جم ۴ا) / (جب ۴ا − جب ۲ا) = مس ۳ا

(۱۱) قم ۲ا + مم ۴ا = مم ا − قم ۴ا

(۱۲) جم² (ا − ب) + جم² ب − ۲ جم (ا − ب) جم ا جم ب = جب² ا

(۱۳) جب² (ا − ب) + جب² ب + ۲ جب (ا − ب) جب ب جم ا = جب² ا

(۱۴) (۱ − مس² (۴۵° − ا)) / (۱ + مس² (۴۵° − ا)) = جب ۲ا

(۱۵) ۴ مس ا (۱ − مس² ا) / (۱ + مس² ا)² = جب ۴ا

(۱۶) جب ا (۱ + مس ا) + جم ا (۱ + قم ا) = قط ا + قم ا

(۱۷) (جب ۳ا + جم ۳ا) / (جب ۳ا − جم ۳ا) = (۱ + ۲ جب ۲ا) / (۱ − ۲ جب ۲ا) مس (ا − ۴۵°)

(۱۸) جم ا + جم (۱۲۰° − ا) + جم (۱۲۰° + ا) = ۰

(۱۹) ۴ جب ا جب (۶۰° − ا) جب (۶۰° + ا) = جب ۳ا

(۲۰) ۴ جم ا جم (۶۰° − ا) جم (۶۰° + ا) = جم ۳ا

(۲۱) جب ۳ا جب³ ا + جم ۳ا جم³ ا = جم³ ۲ا

(۲۲) جم³ ا جب ۳ا / ۳ + جب³ ا جم ۳ا / ۳ = جب ۴ا / ۴

(۲۳) جم ن ا جم (ن + ۲) ا − جم² (ن + ۱) ا + جب² ا = ۰

(۲۴) (جب ا ± جب ن ا + جب (۲ن ± ۱) ا) / (جم ا ± جم ن ا + جم (۲ن ± ۱) ا) = مس ن ا

(۲۵) جب ن ا قم² ا قط ا − جم ن ا قط² ا مم ا = ۴ جب (ن − ۱) ا قم ۲ا [illegible]

(٢٦) جم ١٠ا + جم ٨ا + ٣ جم ٤ا + ٣ جم ٢ا = ٨ جم ا جم^٣ ٣ا

(٢٧) مم ا + مم ٣ا + مم ٤ا

= جم ٤ا (٢ + ٢ جم ٢ا + ٣ جم ٤ا)

(٢٨) قم ا = (٢ جب ٣ا + ٣ جم ٢ا) / (قم ا − جب ا − جم ٣ا + جب ٣ا)

(٢٩) جم^٣ ٢ا = (جم ا − جب ٣ا)^٣ + ٣ جم ا جب ٣ا (جم ا − جب ا)^٣

(٣٠) جم^٦ ا − جب^٦ ا = جم ٢ا (١ − ¼ جب^٢ ٢ا)

ان مساواتون کو حل کرو

(٣١) سس (کہ/٤ − بر) + مم (کہ/٤ − بر) = ٤

(٣٢) جب ٤ بر + جب بر = ٠ (٣٣) جب ٧ بر − جب بر = جب ٣ بر

(٣٤) جب بر + جم بر = ١/√٢ (٣٥) جب ٥ بر = ١٦ جب^٥ بر

(٣٦) جم ٣ بر + جم ٢ بر + جم بر = ٠ (٣٧) جب ٣ بر + جب ٢ بر + جب بر = ٠

(٣٨) سس بر + سس (کہ/٤ + بر) = ٣ (٣٩) سس ٢ بر = ٨ جم^٢ بر − مم بر

(٤٠) سس (کہ/٤ + بر) = ٣ سس (کہ/٤ − بر)

ساتوان باب

زاویون کی قیمت کے قوانین

(٩٥) دفعہ ٨٢ مین ا کو ا/٢ سے بدل دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جم ا = ١ − ٢ جب^٢ ا/٢ = ٢ جم^٢ ا/٢ − ١

اسواسطے جب ا/٢ = ±√((١ − جم ا)/٢) اور جم ا/٢ = ±√((١ + جم ا)/٢)

(٩٦) چونکہ جذر کے اول ہم علامت جمع اور منفی دونو دفعہ گذشتہ مین مقرر کرسکتے ہین تو اسسے معلوم ہوا کہ جم ا کی ایک قیمت کے موافق دو قیمتین جب ا/٢ اور دو قیمتین جم ا/٢ کی نکلینگی اور دلیل اسکی یہہ ہے کہ اگر ایک زاویہ ہو جسکی جیب التمام معلوم ہو تو صورت ٢ن کہ ± سہ مین

وہ سب زاویے داخل ہین جو جیب التمام معلوم رکھتے ہین پس اس سے معلوم ہوا کہ جس جملہ مین قیمت جیب $\frac{س}{۲}$ کی جیب س کی رقمون مین معلوم ہوگی اوسے قیمت اون زاویون مین سے ہر یک زاویہ کی معلوم ہوگی جو صورت $\frac{۱}{۲}$ (۲ ن کہ ± س) مین داخل ہین اب

جیب (ن کہ ± $\frac{س}{۲}$) = جیب ن کہ جم $\frac{س}{۲}$ ± جم ن کہ جیب $\frac{س}{۲}$

= ± جم ن کہ جیب $\frac{س}{۲}$ = ± جیب $\frac{س}{۲}$

پس دو قیمتین نکلتی ہین جنمین فرق علامت کا ہوتا ہے

اور علی ہذا القیاس جس جملہ مین قیمت جم $\frac{س}{۲}$ کی جم س کی رقمون مین معلوم ہوگی اوسے قیمت اون زاویون مین سے ہر یک زاویہ کی جیب التمام معلوم ہوگی جو صورت $\frac{۱}{۲}$ (۲ ن کہ ± $\frac{س}{۲}$) مین داخل ہین اب

جم (ن کہ ± $\frac{س}{۲}$) = جم ن کہ جم $\frac{س}{۲}$ ∓ جیب ن کہ جیب $\frac{س}{۲}$

= جم ن کہ جم $\frac{س}{۲}$ = ± جم $\frac{س}{۲}$

پس دو قیمتین نکلتی ہین جنمین صرف علامت کا فرق ہوتا ہے

(۹۷) اگر جم ا معلوم ہو اور اوسکے ساتھہ کوئی اور بات ا کی بابت مین معلوم ہو تو علامت کا اشتباہ دفعہ ۹۵ کا دور نہین ہو سکتا ہی یہہ امر شبہ مین رہیگا کہ علامت جمع کی ہی یا منفی کی لیکن اگر ا خود معلوم ہو تو $\frac{ا}{۲}$ بھی معلوم ہوگا تو ہمکو دریافت ہو جائیگا کہ جیب $\frac{ا}{۲}$ مثبت ہی یا منفی اور نیز جم $\frac{ا}{۲}$ مثبت ہی یا منفی اسے یہہ معلوم ہو جائیگا کہ جذر مقدار پر کیا علامت لینی چاہیے یا فقط یہی بات معلوم ہو کہ کونسی ربعہ مین $\frac{ا}{۲}$ واقع ہوتا ہی تو بھی مناسب علامت معلوم ہو جائیگی مثلاً اگر $\frac{ا}{۲}$ زاویہ درمیان ۱۸۰° اور ۲۷۰° کے واقع ہو تو اوسکی دونو جیب اور جیب التمام منفی مقدار ہونگی

(۹۸) بموجب دفعہ ۸۲ کے جیب ا = ۲ جیب $\frac{ا}{۲}$ جم $\frac{ا}{۲}$

اور نیز ۱ = جیب^{۲} $\frac{ا}{۲}$ + جم^{۲} $\frac{ا}{۲}$

پس (جیب $\frac{ا}{۲}$ + جم $\frac{ا}{۲}$)^{۲} = ۱ + جیب ا

(جیب $\frac{ا}{۲}$ − جم $\frac{ا}{۲}$)^{۲} = ۱ − جیب ا

اسواسطے $$\text{جب}\ \tfrac{ا}{۲} + \text{جم}\ \tfrac{ا}{۲} = \pm\sqrt{(۱ + \text{جب}\ ا)} \qquad (۱)$$

$$\text{جب}\ \tfrac{ا}{۲} - \text{جم}\ \tfrac{ا}{۲} = \pm\sqrt{(۱ - \text{جب}\ ا)} \qquad (۲)$$

اسواسطے $$۲\ \text{جب}\ \tfrac{ا}{۲} = \pm\sqrt{(۱ + \text{جب}\ ا)} + \sqrt{(۱ - \text{جب}\ ا)}$$

اور $$۲\ \text{جم}\ \tfrac{ا}{۲} = \pm\sqrt{(۱ + \text{جب}\ ا)} - \sqrt{(۱ - \text{جب}\ ا)}$$

(۹۹) دفعہ مذکور مین مساوات (۱) اور (۲) مین ہر مقدار کو جذر کی علامت ہی مثبت اور منفی فرض کر سکتے ہین اسواسطے جب ا کی ایک قیمت کے موافق چار قیمتین جم $\tfrac{ا}{۲}$ اور چار قیمتین جب $\tfrac{ا}{۲}$ کی دریافت ہونگین اور دلیل اسکی یہہ ہو سکتی ہے کہ اگر سہ کوئی زاویہ ہو جو جیب معلوم رکہتا ہو تو صورت ن کہ + $(-۱)^{ن}$ سہ مین سب زاویے داخل ہین جنکی جیب وہی ہے جو جیب معلوم ہے پس حسب جملہ مین جب $\tfrac{سہ}{۲}$ کی جب سہ کی رقمون مین معلوم ہوگی اوسے قیمت اون زاویون مین سے ہر ایک زاویہ کی معلوم ہوگی جو صورت $\tfrac{۱}{۲}$ (ن کہ + $(-۱)^{ن}$ سہ) مین داخل ہین اول فرض کرو کہ ن جفت ہی اور ۲م کی برابر ہے

$$\text{تو جب}\ \tfrac{۱}{۲}\left[\text{ن کہ} + (-۱)^{ن}\ \text{سہ}\right] = \text{جب}\left(\pm\ \text{م کہ} + \tfrac{\text{سہ}}{۲}\right) =$$
$$\text{جب م کہ جم}\ \tfrac{\text{سہ}}{۲} + \text{جم م کہ جب}\ \tfrac{\text{سہ}}{۲}$$
$$= \text{جم م کہ جب}\ \tfrac{\text{سہ}}{۲} = \pm\ \text{جب}\ \tfrac{\text{سہ}}{۲}$$

اب فرض کرو کہ ن طاق ہو اور ۲م + ۱ کی برابر ہو تو

$$\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\left[\text{ن کہ} + (-۱)^{ن}\ \text{سہ}\right] = \text{جب}\left(\text{م کہ} + \tfrac{\text{کہ} - \text{سہ}}{۲}\right)$$
$$= \text{جب م کہ جم}\ \tfrac{\text{کہ} - \text{سہ}}{۲} + \text{جم م کہ جب}\ \tfrac{\text{کہ} - \text{سہ}}{۲}$$
$$= \text{جم م کہ جب}\ \tfrac{\text{کہ} - \text{سہ}}{۲} = \pm\ \text{جب}\ \tfrac{\text{کہ} - \text{سہ}}{۲} = \pm\ \text{جم}\ \tfrac{\text{سہ}}{۲}$$

پس نصف زاویہ کی جیب کی چار قیمتین ہین زاویہ کی جیب معلوم سے نکلینگی

علی ہذا القیاس حسب جملہ مین قیمت جم $\tfrac{سہ}{۲}$ کی جب سہ کی رقمون مین معلوم ہوگی اوسے قیمت ہر ایک زاویہ کی اون زاویون مین سے معلوم ہوگی جو صورت $\tfrac{۱}{۲}\left[\text{ن کہ} + (-۱)^{ن}\ \text{سہ}\right]$ مین ہین

داخل ہین اول فرض کرو کہ ن جفت ہو اور برابر ۲م کے ہو تو

$$\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\left[\text{ن کہ} + (-1)^{\text{ن}}\ \text{سہ}\right] = \text{جم}\left(\text{م کہ} + \tfrac{\text{سہ}}{2}\right) = \text{جم م کہ جم}\ \tfrac{\text{سہ}}{2} - \text{جب م کہ جب}\ \tfrac{\text{سہ}}{2}$$

$$= \text{جم م کہ جم}\ \tfrac{\text{سہ}}{2} = \pm\ \text{جم}\ \tfrac{\text{سہ}}{2}$$

دوم فرض کرو کہ ن طاق ہو اور ۲م + ۱ کی برابر ہو تو

$$\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\left[\text{ن کہ} + (-1)^{\text{ن}}\ \text{سہ}\right] = \text{جم}\left(\text{م کہ} + \tfrac{\text{کہ} - \text{سہ}}{2}\right) =$$

$$\text{جم م کہ جم}\ \tfrac{\text{کہ} - \text{سہ}}{2} - \text{جب م کہ جب}\ \tfrac{\text{کہ} - \text{سہ}}{2}$$

$$= \text{جم م کہ جم}\ \tfrac{\text{کہ} - \text{سہ}}{2} = \pm\ \text{جم}\ \tfrac{\text{کہ} - \text{سہ}}{2} = \pm\ \text{جب}\ \tfrac{\text{سہ}}{2}$$

پس جسوقت کہ زاویہ کی جیب معلوم ہو تو اوسے نصف زاویہ کی جیب کی چار قیمتین نکلینگے

(۱۰۰) اگر صرف جب ا معلوم ہو اور کوئی اور بات ا کے باب مین نہ معلوم ہو تو دفعہ ۹۱ مین علامت کا اشتباہ دور نہین ہو سکتا لیکن اگر خود ا معلوم ہو یا فقط ہم یہہ جانتے ہون کہ وہ کسی ربعہ مین واقع ہے تو مناسب علامتین ہم تحقیق کر سکتے ہین اسواسطے کہ ہم ہر خاص صورت مین یہہ عمل ذیل کر سکتے ہین

$$\text{جب}\ \tfrac{\text{ا}}{2} + \text{جم}\ \tfrac{\text{ا}}{2} = \pm\sqrt{1 + \text{جب ا}} \qquad (1)$$

$$\text{جب}\ \tfrac{\text{ا}}{2} - \text{جم}\ \tfrac{\text{ا}}{2} = \pm\sqrt{1 - \text{جب ا}} \qquad (2)$$

اب تمثیلاً فرض کرو کہ ا درمیان ۰ اور ۹۰° کے واقع ہے تو ا/۲ درمیان ۰ اور ۴۵° کے واقع ہوگا اسواسطے جم ا/۲ اور جب ا/۲ دونو مثبت ہین اور جم ا/۲ بڑا بہ نسبت جب ا/۲ کی ہے اسے معلوم ہوا کہ (۱) مین رکن بائین طرف کا مثبت مقدار ہے اسواسطے علامت مثبت لینی چاہیے اور (۲) مین رکن بائین طرف کا منفی مقدار ہے اور اسواسطے ہمکو علامت (−) مین لینی چاہیے اسواسطے اگر ا درمیان ۰ اور ۹۰° کے واقع ہو تو

$$\text{جب}\ \tfrac{\text{ا}}{2} + \text{جم}\ \tfrac{\text{ا}}{2} = +\sqrt{(1 + \text{جب ا})}$$

$$\text{جب}\ \tfrac{\text{ا}}{2} - \text{جم}\ \tfrac{\text{ا}}{2} = -\sqrt{1 - \text{جب ا}}$$

اسواسطے

$$2\ \text{جب}\ \tfrac{\text{ا}}{2} = +\sqrt{1 + \text{جب ا}} - \sqrt{1 - \text{جب ا}}$$

$$2\ \text{جم}\ \tfrac{\text{ا}}{2} = +\sqrt{1 + \text{جب ا}} + \sqrt{1 - \text{جب ا}}$$

ایک اور مثال کے واسطے فرض کرو کہ ا ۲۷۰° اور ۳۶۰° کے درمیان واقع ہو تو ۱۳۵° اور ۱۸۰° کے درمیان $\frac{ا}{۲}$ واقع ہوگا اسواسطے جم $\frac{ا}{۲}$ منفی ہے اور جب $\frac{ا}{۲}$ مثبت ہے اور جم $\frac{ا}{۲}$ تعداداً بڑی جب $\frac{ا}{۲}$ سے ہے اسلئے معلوم ہوا کہ (۱) مین رکن بائین طرف کا منفی مقدار ہے اسواسطے ہمکو منفی علامت (۱) مین لینی چاہئے اور (۲) مین رکن بائین طرف کا مثبت مقدار ہے اسواسطے ہمکو (۲) مین مثبت علامت لینی چاہئے اسواسطے اگر ا درمیان ۲۷۰° اور ۳۶۰° کے واقع ہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{جب}\,\frac{ا}{۲} + \text{جم}\,\frac{ا}{۲} = -\sqrt{(۱ + \text{جب}\,ا)}$$

$$\text{جب}\,\frac{ا}{۲} - \text{جم}\,\frac{ا}{۲} = +\sqrt{(۱ - \text{جب}\,ا)}$$

$$\text{اسواسطے}\quad ۲\,\text{جب}\,\frac{ا}{۲} = -\sqrt{(۱ + \text{جب}\,ا)} + \sqrt{(۱ - \text{جب}\,ا)}$$

$$۲\,\text{جم}\,\frac{ا}{۲} = -\sqrt{(۱ + \text{جب}\,ا)} - \sqrt{(۱ - \text{جب}\,ا)}$$

(۱۰) ایک صورت عامہ علامات جب $\frac{ا}{۲}$ + جم $\frac{ا}{۲}$ اور جب $\frac{ا}{۲}$ − جم $\frac{ا}{۲}$ کے بیان کرنی اسواسطے کہ

$$\text{جب}\,\frac{ا}{۲} + \text{جم}\,\frac{ا}{۲} = \sqrt{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{جب}\,\frac{ا}{۲} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{جم}\,\frac{ا}{۲}\right)$$

$$= \sqrt{۲}\,\text{جب}\left(\frac{ا}{۲} + \frac{\pi}{۴}\right)$$

اب جب $\left(\frac{ا}{۲} + \frac{\pi}{۴}\right)$ مثبت ہے اگر $\frac{ا}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ درمیان ۲ن π اور (۲ن + ۱) π کے درمیان واقع ہو اور منفی ہے اگر $\frac{ا}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ درمیان (۲ن + ۱) π اور (۲ن + ۲) π کے درمیان واقع ہو اسمین ن صفر ہے یا کوئی مثبت منفی صحیح عدد ہے پس جب $\frac{ا}{۲}$ + جم $\frac{ا}{۲}$ مثبت ہے اگر $\frac{ا}{۲}$ درمیان ۲ن $\pi - \frac{\pi}{۴}$ اور ۲ن $\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ کے درمیان واقع ہو اور منفی ہے اگر $\frac{ا}{۲}$ درمیان ۲ن $\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ اور ۲ن $\pi + \frac{۷\pi}{۴}$ کے علی ہذا القیاس جب $\frac{ا}{۲}$ − جم $\frac{ا}{۲}$ = $\sqrt{۲}$ جب $\left(\frac{ا}{۲} - \frac{\pi}{۴}\right)$ اسسے ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ جب $\frac{ا}{۲}$ − جم $\frac{ا}{۲}$ مثبت ہے اگر $\frac{ا}{۲}$ درمیان ۲ن $\pi + \frac{\pi}{۴}$ اور

۲ ن کہ + ۵کہ/۴ واقع ہو اور منفی ہے اگر ا/۲ درمیان ۲ ن کہ + ۵کہ/۴ اور ۲ ن کہ + ۷کہ/۴ کے واقع ہو

(۱۰۲) بموجب دفعہ ۸۵ کے مس ا = ۲ مس ا/۲ ÷ (۱ − مس² ا/۲)

مس ا کے جگہہ ح کو لکھو تو ح مس² ا/۲ + ۲ مس ا/۲ − ح = ۰

اسواسطے مس ا/۲ = (− ۱ ± √(۱ + ح²)) ÷ ح

(۱۰۳) اب دلیل اس بات کی کہ نصف زاویہ کے مماس کی دو قیمتین کیون ایک قیمت معلوم سے نکلتی ہین یہہ ہے کہ اگر سہ کوئی زاویہ ہو جو مماس معلوم رکھتا ہو تو صورت ن کہ + سہ مین سب زاوے وہ داخل ہین جو یہہ مماس معلوم رکھتے ہین اسواسطے جس جملہ سے قیمت مس سہ/۲ کی مس سہ کی رقمون مین معلوم ہوتی ہے اوسے اون زاویون مین سے ہر ایک زاویہ مماس کی قیمت معلوم ہوگی جو صورت ۱/۲ (ن کہ + سہ) مین داخل ہین اول فرض کرو کہ ن جفت ہو اور برابر ۲ م کے ہو تو مس ۱/۲ (ن کہ + سہ) = مس (م کہ + سہ/۲) = مس سہ/۲

دوم فرض کرو کہ ن طاق ہو اور برابر ۲ م + ا کے ہو تو

مس ۱/۲ (ن کہ + سہ) = مس (م کہ + (کہ + سہ)/۲) = مس (کہ + سہ)/۲

= مس (کہ/۲ + سہ/۲) = − مم سہ/۲

پس دو قیمتین مماس نصف زاویہ کی معلوم ہونگین اگر مماس زاویہ کا معلوم ہو

(۱۰۴) اگر مس ا معلوم ہو اور کوئی بات اکے باب مین معلوم ہو تو علامت کا اشتباہ دفعہ ۱۰۲ مین کسی طرح دور نہین ہوسکتا لیکن اگر ا خود ہو یا فقط یہہ معلوم ہو کہ ا/۲ کس ربع مین واقع ہے تو ہم اس بات کو جان سکتے ہین کہ مس ا/۲ مثبت ہے یا منفی اور کونسی علامت ہمکو مقرر کرنی چاہیئے

(۱۰۵) بموجب دفعہ ۹۱ کے جم ا = ۴ جم³ ا/۳ − ۳ جم ا/۳

اگر جم ا معلوم ہو تو جم ا/۳ کے دریافت کرنیکے واسطے ایک مکعبی مساوات حاصل ہوگی اور دلیل اسکی موافق سابق کے ہے اسواسطے کہ اگر سہ ایک زاویہ ہو جسکی جیب التمام معلوم ہو

تو صورت ۲ن کہ ± سہ میں وہ سب زاوئیے داخل ہیں جو جیب التمام معلوم رکھتے ہیں اسواسطے جس جملہ سے قیمت جم $\frac{سہ}{۳}$ کی جم سہ کی رقموں میں معلوم ہوگی اوسے اون زاویوں میں سے ہریک زاویہ کی جیب التمام کی قیمت معلوم ہوگی جو صورت $\frac{۱}{۳}$ (۲ن کہ ± سہ) میں داخل ہیں اب ن کی صورت ان تین صورتوں ۳م اور ۳م + ۱ اور ۳م − ۱ میں سے ایک نہ ایک ہوگی اول فرض کرو کہ ن = ۳م تو

جم $\frac{۱}{۳}$ (۲ن کہ + سہ) = جم (۲م کہ ± $\frac{سہ}{۳}$) = جم $\frac{سہ}{۳}$

دوم فرض کرو کہ ن = ۳م + ۱ تو

جم $\frac{۱}{۳}$ (۲ن کہ ± سہ) = جم (۲م کہ + $\frac{۲کہ ± سہ}{۳}$) = جم $\frac{۲کہ ± سہ}{۳}$

آخر فرض کرو کہ ن = ۳م − ۱ تو

جم $\frac{۱}{۳}$ (۲ن کہ ± سہ) = جم (۲م کہ − $\frac{۲کہ ± سہ}{۳}$) = جم $\frac{۲کہ ∓ سہ}{۳}$

پس اسطرح تین قیمتیں یعنی جم $\frac{سہ}{۳}$ و جم $\frac{۲کہ + سہ}{۳}$ اور جم $\frac{۲کہ − سہ}{۳}$ واقع ہوتے ہیں

(۱۰۶) بموجب دفعہ ۹۱ کے جب ا = ۳ جب $\frac{ا}{۳}$ − ۴ جب^{۳} $\frac{ا}{۳}$

پس اگر جب ا معلوم ہو تو جب $\frac{ا}{۳}$ کی قیمت دریافت کرنیکے واسطے ایک مساوات تیسرے درجہ کی حاصل ہوگی اور دلیل اوسکی واسطے موافق سابق کے قائم ہو سکتی ہے

مثالیں

(۱) اگر ا درمیان ۵۰ ۹۰° اور ۲۷۰° واقع ہو تو ثابت کرو کہ

۲ جب $\frac{ا}{۲}$ = − $\sqrt{(۱ + جب ا)}$ − $\sqrt{(۱ − جب ا)}$

(۲) جب کہ $\frac{ا}{۲}$ درمیان ۵ ۹۰° اور ۵ ۹۰° کے واقع ہو تو جم $\frac{ا}{۲}$ کو جب ا کی رقموں میں بیان کرو

(۳) جب کہ $\frac{ا}{۲}$ درمیان − ۵ ۹۰° اور ۵ ۱۳۰° کے درمیان واقع ہو تو جب $\frac{ا}{۲}$ کو جب ا کی رقموں میں بیان کرو

(۴) بتاؤ کہ ا کن حدوں کے درمیان واقع ہو کہ

۲ جب ا = − $\sqrt{(۱ + جب ۲ا)}$ + $\sqrt{(۱ − جب ۲ا)}$

اور ۲ جم ا = − $\sqrt{(۱ + جب ۲ا)}$ − $\sqrt{(۱ − جب ۲ا)}$

(۵) بتاؤ کہ ا کن حدود کے درمیان واقع ہو کہ

۲ جم ا = − √(۱ + جب ۲ ا) + √(۱ − جب ۲ ا) کے ہو

(۶) بتاؤ کہ ا کن حدود کے درمیان واقع ہو کہ

۲ جب ا = √(۱ + جب ۲ ا) − √(۱ − جب ۲ ا)

(۷) ایک زاویہ معلوم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ اوسکے جیبوں میں نسبت معلوم ہو

(۸) ایک زاویہ معلوم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ اوسکی جیب التماموں میں نسبت معلوم ہو

(۹) ایک زاویہ معلوم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ اوسکے مماسوں میں نسبت معلوم ہو

(۱۰) معلوم ہے کہ مس ا/۲ = ۲ − √۳ قیمت جب ا کی دریافت کرو

(۱۱) جب ۲۱۰° = − ۱/۲ تو جم ۱۰۵° کی دریافت کرو

(۱۲) معلوم ہے کہ مس ۲ ا = − ۲۴/۷ قیمت جب ا اور جم ا کی دریافت کرو

(۱۳) مس ۶۵° قیمت مس ۴۰°۳۰ کی قیمت سے دریافت کرو

(۱۴) ثابت کرو کہ مس² ا/۲ = (۲ جب ا − جب ۲ ا)/(۲ جب ا + جب ۲ ا)

(۱۵) جم (۱۸۰° − ا) = ۲ جم ۱/۲ (۱۸۰° + ا) جم ۱/۲ (۱۸۰° − ا)

(۱۶) (جم ا + جم ب)² + (جب ا + جب ب)² = ۴ جم² ۱/۲ (ا − ب)

(۱۷) (جم ا − جم ب)² + (جب ا − جب ب)² = ۴ جب² ۱/۲ (ا − ب)

(۱۸) ثابت کرو کہ جب ۲۲ ۱/۲° = √(۲ − √۲)/۲ جم ۲۲ ۱/۲° = √(۲ + √۲)/۲

اور مس ۲۲ ۱/۲ = √۲ − ۱

(۱۹) مس (π/۴ + ۱/۲ ا) = (قط ا + مس ا)/(قط ا − مس ا)

(۲۰) مس (π/۴ + ۱/۲ ا) = (قط ا + مس ا)/(قط ا − مس ا)

(۲۱) جب (π/۴ − بر/۲) + جم (π/۴ − بر/۲) = جب بر/√(جم بر)

(۲۲) √(۱ + جب بر) = ۱ + ۲ جب π/۴ √(۱ − جب π/۲)

(۲۳) جم^۴ کہ/۸ + جم^۴ ۳کہ/۸ + جم^۴ ۵کہ/۸ + جم^۴ ۷کہ/۸ = ۳/۲

(۲۴) مس ۷ ½° = (√۳ − ۱) / (√۲ + √۳)

(۲۵) مس ۱۴۲ ½° = ۲ + √۲ − √۳ − √۶

(۲۶) اگر مس لا = (۲ + √۳) مس لا/۳ قیمت لا کی دریافت کرو

(۲۷) اگر سہ = (ن + ½ ± ⅙) کہ قیمت مس سہ + مم سہ کی دریافت کرو

(۲۸) اگر سہ = کہ/۱۷ اکو قیمت (جم سہ جم ۱۳ سہ) / (جم ۳ سہ + جم ۵ سہ) کو دریافت کرو

(۲۹) اگر قط (صہ + سہ) + قط (صہ − سہ) = ۲ قط صہ تو ثابت کرو کہ

جم صہ = √۲ جم سہ/۲

(۳۰) اگر مس بہ/۲ = ((۱ + ح)/(۱ − ح))^½ مس صہ/۲ تو ثابت کرو کہ

جم بہ = (جم صہ − ح) / (۱ − ح جم صہ)

آٹھواں باب

مسائل مختلفہ

(۱۰۷) ۱۸° کی زاویہ کی جیب اور جیب التمام دریافت کرو

فرض کرو کہ زاویہ ا مین ۱۸° ہین تو ۲ ا مین ۳۶° اور ۳ ا مین ۵۴° ہونگے اسسے معلوم ہوا کہ

جب ۲ ا = جم ۳ ا

اسیواسطے ۲ جب ا جم ا = ۴ جم^۳ ا − ۳ جم ا

جم ا پر تقسیم کرو تو ۲ جب ا = ۴ جم^۲ ا − ۳ = ۱ − ۴ جب^۲ ا

اسیواسطے ۴ جب^۲ ا + ۲ جب ا − ۱ = ۰

اس مساوات درجہ دوم کے حل کرنے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

جب ا = (−۱ ± √۵) / ۴

چونکہ ۱۸° کے زاویہ کے جیب مثبت مقدار ہے اسواسطے اوپر کی علامت لینی چاہیئے اسیواسطے

جب $18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

اور جب 18° = $\sqrt{1 - \text{جب}^2 18}$ = $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

(۱۰۸) 36° کے زاویہ کی جیب اور جیب التمام دریافت کرو

جم $36^\circ = 1 - 2$ جیب$^2 18^\circ = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

جب $36^\circ = \sqrt{(1 - \text{جم}^2 36^\circ)} = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

(۱۰۹) اسے 54° اور 72° کے زاویون کی بہی علم شلثی نسبتین معلوم ہوسکتی ہین اسواسطے کہ جب 54° = جم 36° اور جم 54° = جب 36° اور جب 72° = جم 18° اور جم 72° = جب 18°

(۱۱۰) وجہ اس بات کی کہ دفعہ ۱۰۷ مین کیون دو نتیجے حاصل ہوئے ہہہ ہے کہ مساوات جب ۲ا = جب ۳ا کی علاوہ 18° کے اور زاویون کے واسطے بہی موضوع ہے اوسکو اسطرح بہی لکھہ سکتے ہین کہ

جم $(90^\circ - 2\text{ا})$ = جم ۳ا

اسے یہہ نتیجہ پیدا ہوتا ہی کہ 90° – ۲ا کیا تو برابر ۳ا کے ہو یا اون زاویون مین سے جنکی جیب التمام وہی ہے جو ۳ا کی جیب التمام ہے ایک زاویہ ہو تو ہر قیمت ا کی جو ایسی موقع پر داخل ہوسکتی ہے اس مساوات سے دریافت ہوگی کہ

90° – ۲ا = ن × 360° ± ۳ا

اسمین ن صفر یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے

پس ا = $\frac{90^\circ - \text{ن} \times 360^\circ}{2 \pm 3}$

مثلاً اگر ن = ۰ تو نسب نما مین علامت زیرین لینی چاہئے پس ا = – 90° کے حاصل ہوگا اور اس قیمت سے جم ا = ۰ کے ہو جائیگی یہی وجہ تہی کہ دفعہ ۱۰۷ مین جم ا ایک جز ضربی ظاہر ہوا تہا اور ہم نے اوسکو تقسیم کرنے سے ساقط کردیا تہا

اب اگر پہر ن = ۱ سکے لکہین اور نسب نما مین اوپر کی علامت لین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ا = – $\frac{270^\circ}{5}$ = – 54° اور جب (-54°) = – جب 54° = – جم 36° = – $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

یہی وجہ تہی کہ دفعہ ۱۰۷ مین مساوات درجہ دوم کی اور قیمتین علاوہ اوس قیمت کے جسکو ہم استعمال مین لائے پیدا ہوتی ہتہین

(۱۱۱) ۹° کے اور ۸۱° کے زاویون کے جیب اور جیب التمام دریافت کرو

بموجب دفعہ ۱۰۰ کے

جب ۹° + جم ۹° = √(۱ + جب ۱۸°) = √(۳ + √۵) / ۲

جب ۹° − جم ۹° = − √(۱ − جب ۱۸°) = − √(۵ − √۵) / ۲

اسواسطے جب ۹° = (√(۳ + √۵) − √(۵ − √۵)) / ۴

اور جم ۹° = (√(۳ + √۵) + √(۵ − √۵)) / ۴

اور جب ۸۱° = جم ۹° اور جم ۸۱° = جب ۹°

غرض ہم نے جملے زوایا، مفصلہ ذیل کے جیوب اور جیوب التمام کے واسطے دریافت کیے ۹° و ۱۵° و ۱۸° و ۳۰° و ۳۶° و ۴۵° و ۵۴° و ۶۰° و ۷۲° و ۷۵° و ۸۱° جیوب اور جیوب التمام

(دفعات ۳۶ و ۳۷ و ۹۳ و ۱۰۷ و ۱۰۸ و ۱۱۱)

چونکہ ۳° = ۱۸° − ۱۵° اسواسطے ہم بموجب دفعہ ۷۷ کے جیب اور جیب التمام ۳° کے بہی دریافت کرسکتے ہین اور پہر دفعہ ۷۶ اور اون نتائج سے جو ابہی حاصل ہوئی ہین جیب اور جیب التمام اون زاویون کی جو اس سلسلہ ۳° و ۶° و ۹° و ۱۲° وغیرہما مین داخل ہین دریافت کرینگے

(۱۱۲) دفعات ۸۷ و ۹۱ مین جب ۲ا اور جم ۲ا و جب ۳ا اور جم ۳ا کے جملکو ارقام جب ا اور جم ا مین بیان کیا ہے اور اسیطرح جوب اور جوب التمام ۴ا اور ۵ا وغیرہما کو بہی بیان کرسکتے ہین

اسواسطے کہ جب (ن + ۱) ا + جب (ن − ۱) ا = ۲ جب ن ا جم ا

اسیواسطے جب (ن + ۱) ا = ۲ جب ن ا جم ا − جب (ن − ۱) ا

فرضکرو کہ ن = ۳ تو جب ۴ ا = ۲ جب ۳ ا جم ا − جب ۲ ا

〃 ن = ۴ تو جب ۵ ا = ۲ جب ۴ ا جم ا − جب ۳ ا

اور علی ہذا القیاس تواتر جیب ۴ ا اور جب ۵ ا وغیرہما کی جیب اور جیب التمام ا کے رقموں مین بیان ہو سکتی ہین اور اسیطرح یہہ صورت قانونی ہے کہ

جم (ن + ۱) ا + جم (ن − ۱) ا = ۲ جم ن ا جم ا

جم ۴ ا و جم ۵ ا وغیرہما کے دریافت کرنے کے لئے کام مین آسکتے ہین اس مضمون کو پہر لکھینگے اور اوسمین عام طور پر جیب اور جیب التمام ن ا کی ا کی جیب اور جیب التمام کی رقموں مین بیان کرینگے اور اسمین ن کی صحیح قیمت صحیح عدد ہوگا

(۱۱۳) یہہ بات آسان ہے کہ کسی مرکب زاویہ کی علم مثلثی نسبتوں کو اوسکی افراد کے علم مثلثی نسبتوں مین بیان کرین

جب (ا + ب + س) = جب (ا + ب) جم س + جم (ا + ب) جب س

= جب ا جم ب جم س + جب ب جم س جم ا

+ جب س جم ا جم ب − جب ا جب ب جب س

جم (ا + ب + س) = جم (ا + ب) جم س − جب (ا + ب) جب س

= جم ا جم ب جم س − جم ا جب ب جب س − جم ب جب ا جب س − جم س جب ا جب ب

مس (ا + ب + س) = جب (ا + ب + س) / جم (ا + ب + س)

= (جب ا جم ب جم س + جب ب جم س جم ا + جب س جم ا جم ب − جب ا جب ب جب س) / (جم ا جم ب جم س − جم ا جب ب جب س − جم ب جب ا جب س − جم س جب ا جب ب)

آخر جملہ کے شمار کنندہ اور نسب نما کو جم ا جم ب جم س پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

مس (ا + ب + س) = (مس ا + مس ب + مس س − مس ا مس ب مس س) / (۱ − مس ب مس س − مس س مس ا − مس ا مس ب)

ب اور س مین سے ہریک برابر ا کے فرض کرو تو

مس ۳ ا = (۳ مس ا − مس۳ ا) ÷ (ا − ۳ مس۲ ا)

(۱۱۴) جب تین یا زیادہ زاویوں میں باہم کوئی ربط ہو تو اونکی علم مثلثی نسبتوں میں ایک آسان ربط دریافت ہو سکتا ہے مثلاً اگر

ا + ب + س = ۱۸۰° تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جب ۲ ا + جب ۲ ب + جب ۲ س = ۴ جب ا جب ب جب س

اسواسطے کہ جب ۲ ا + جب ۲ ب = ۲ جب (ا + ب) جم (ا − ب) = ۲ جب س جم (ا − ب)

اور جب ۲ س = ۲ جب س جم س = − ۲ جب س جم (ا + ب) بموجب دفعہ ۴۸ کے

اسیواسطے جب ۲ ا + جب ۲ ب + جب ۲ س = ۲ جب س [جم (ا − ب) − جم (ا + ب)]

اور = ۴ جب س جب ا جب ب

اب اگر پہر ا + ب + س = ۱۸۰° تو

جم ا + جم ب + جم س = ۱ + ۴ جب ½ ا جب ½ ب جب ½ س

اسواسطے کہ جم ا + جم ب = ۲ جم ½ (ا + ب) جم ½ (ا − ب)

= ۲ جب ½ س جم ½ (ا − ب)

اور جم س = ۱ − ۲ جب۲ ½ س اسیواسطے

جم ا + جم ب + جم س = ۱ + ۲ جب ½ س [جم ½ (ا − ب) − جب ½ س]

= ۱ + ۲ جب ½ س [جم ½ (ا − ب) − جم ½ (ا + ب)]

= ۱ + ۴ جب ½ ا جب ½ ب جب ½ س

اب پہر اگر ا + ب + س = ۱۸۰° تو

مس ا + مس ب + مس س = مس ا مس ب مس س

اسواسطے کہ مس ۱۸۰° = ۰ اسیواسطے مس (ا + ب + س) = ۰ اور اسیواسطے

بموجب دفعہ ۱۱۳ کے مس ا + مس ب + مس س − مس ا مس ب مس س = ۰

اور پھر بموجب دفعہ ۱۱۳ کے

$$\text{مم}(ا+ب+س) = \frac{\text{مس ا مس ب مس س} - \text{مس ا} - \text{مس ب} - \text{مس س}}{\text{مس ا مس ب} + \text{مس ب مس س} + \text{مس س مس ا} - 1}$$

اب مم ۹۰ = ۰ اسسے معلوم ہوا کہ اگر ا + ب + س = ۹۰ تو

۱ = مس ب مس س + مس س مس ا + مس ا مس ب

(۱۱۵) ایک اور مثال یہ ہے کہ ا اور ب اور س مین ایسا ربط دریافت کرو

جم^۲ ا + جم^۲ ب + جم^۲ س + ۲ جم ا جم ب جم س − ۱ صفر ہو

جم^۲ ا + جم^۲ ب + جم^۲ س + ۲ جم ا جم ب جم س − ۱

= (جم ا + جم ب جم س)^۲ + جم^۲ ب + جم^۲ س − ۱ − جم^۲ ب جم^۲ س

= (جم ا + جم ب جم س)^۲ + ۱ − جب^۲ ب + ۱ − جب^۲ س − ۱

− (۱ − جب^۲ ب)(۱ − جب^۲ س)

= (جم ا + جم ب جم س)^۲ − جب^۲ ب جب^۲ س

= (جم ا + جم ب جم س + جب ب جب س)(جم ا + جم ب جم س − جب ب جب س)

= [جم ا + جم (ب − س)] [جم ا + جم (ب + س)]

$$= ۴\ \text{جم}\frac{ا+ب-س}{۲}\ \text{جم}\frac{ا-ب+س}{۲}\ \text{جم}\frac{ا+ب+س}{۲}\ \text{جم}\frac{ب+س-ا}{۲}$$

اسسے معلوم ہوا کہ جملہ مفروضہ کے صفر ہونیکے واسطے ضرور ہے کہ ان آخر چارون جموب التام مین سے ہر ایک برابر صفر کے ہو پس ان چارون مرکب زاویون مین سے ہر ایک طاق اضعاف قائمہ کا ہو

امثلہ متفرقہ

ان صور قانونیہ کو ثابت کرو

(۱) $\frac{\text{جم}(ا+ب+س)}{\text{جم ا جم ب جم س}}$ = ۱ − مس ب مس س − مس س مس ا − مس ا مس ب

(۲) $\frac{\text{جب}(ا+ب+س)}{\text{جم ا جم ب جم س}}$ = مس ا + مس ب + مس س − مس ا مس ب مس س

(۳) جب^۲ (صم − صہ) + جب (صہ − مر) + جب (مر − صم)

(۳) جب (سہ − صہ) + جب (صہ − مہ) + جب (مہ − سہ)

+ ۴ جب $\frac{\text{سہ − صہ}}{۲}$ جب $\frac{\text{صہ − مہ}}{۲}$ جب $\frac{\text{مہ − سہ}}{۲}$ = ۰

(۴) ۴ جب (بر − سہ) جب (م بر − سہ) جم (بر − م بر)

= ۱ + جم (۲ بر − ۲ م بر) − جم (۲ بر − ۲ سہ) − جم (۲ م بر − ۲ سہ)

(۵) جب (سہ + صہ) جم صہ − جب (سہ + مہ) جم مہ = جب (صہ − مہ) جم (سہ + صہ + مہ)

(۶) جم (ا + ب + س) + جم (ا + ب − س) + جم (ا + س − ب) + جم (ب + س − ا)

= ۴ جم ا جم ب جم س

(۷) جم ۲ سہ + جم ۲ صہ + جم ۲ مہ = ۴ جم (سہ + صہ) جم (صہ + مہ) جم (مہ + سہ)

− جم ۲ (سہ + صہ + مہ)

(۸) $\frac{\text{جب ا}}{\text{جب (ا − ب) جب (ا − س)}}$ + $\frac{\text{جب ب}}{\text{جب (ب − س) جب (ب − ا)}}$ +

+ $\frac{\text{جب س}}{\text{جب (س − ا) جب (س − ب)}}$ = ۰

(۹) جم (سہ + صہ) جب صہ − جم (سہ + مہ) جب مہ

= جب (سہ + صہ) جم صہ − جب (سہ + مہ) جم مہ

(۱۰) جب (سہ + صہ − ۲ مہ) جم صہ − جب (سہ + مہ − ۲ صہ) جم مہ

= جم (صہ − مہ) [جم (صہ + مہ − سہ) + جم (سہ + مہ − صہ) + جم (سہ + صہ − مہ)]

(۱۱) جب (ا + ب + س) جب ب = جب (ا + ب) جب (ب + س) − جب ا جب س

(۱۲) جب سہ جب صہ جب (صہ − سہ) + جب صہ جب مہ جب (مہ − صہ)

+ جب مہ جب سہ جب (سہ − مہ) + جب (صہ − سہ) جب (مہ − صہ) جب (سہ − مہ) = ۰

(۱۳) جم (سہ + صہ) جب (سہ − صہ) + جم (صہ + مہ) جب (صہ − مہ)

+ جم (مہ + فہ) جب (مہ − فہ) + جم (فہ + سہ) جب (فہ − سہ) = ۰

(۱۴) جب (فر - صد) جبا (سہ - مر) + جب (صد - مر) جب (سہ - فر) + جب (مر - فر) جب (سہ - صد) = ۰

اگر ا + ب + س = ۱۸۰° تو ۱۵ امثال سے ۳۰ مثال تک جو صلو جبریہ لکھی ہیں ثابت کرو

(۱۵) مم ا/۲ + مم ب/۲ + مم س/۲ = مم ا/۲ مم ب/۲ مم س/۲

(۱۶) جب ا + جب ب + جب س = ۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جم س/۲

(۱۷) جب ا - جب ب + جب س = ۴ جب ا/۲ جم ب/۲ جب س/۲

(۱۸) جم ۲ا + جم ۲ب + جم ۲س + ۴ جم ا جم ب جم س + ۱ = ۰

(۱۹) جم ۴ا + جم ۴ب + جم ۴س + ۱ = ۴ جم ۲ا جم ۲ب جم ۲س

(۲۰) جم ا/۲ + جم ب/۲ + جم س/۲ = ۴ جم (ک - ا)/۴ جم (ک - ب)/۴ جم (ک - س)/۴

(۲۱) جم ا/۲ - جم ب/۲ + جم س/۲ = ۴ جم (ک + ا)/۴ جم (ک - ب)/۴ جم (ک + س)/۴

(۲۲) جب ا/۲ + جب ب/۲ + جب س/۲ - ۱ = ۴ جب (ک - ا)/۴ جب (ک - ب)/۴ جب (ک - س)/۴

(۲۳) جب^۲ ا + جب^۲ ب + جب^۲ س - ۲ جم ا جم ب جم س = ۲

(۲۴) جب^۲ ۲ا + جب^۲ ۲ب + جب^۲ ۲س + ۲ جم ۲ا جم ۲ب جم ۲س = ۲

(۲۵) مس ا/۲ مس ب/۲ + مس ب/۲ مس س/۲ + مس س/۲ مس ا/۲ = ۱

(۲۶) (جب ا + جب ب - جب س) / (جب ا + جب ب + جب س) = مس ا/۲ مس ب/۲

(۲۷) ۱ + جم ا جم ب جم س = جم ا جب ب جب س + جم ب جب ا جب س + جم س جب ا جب ب

(۲۸) مم ا + مم ب + مم س = مم ا مم ب مم س + قم ا قم ب قم س

(۲۹) جب^۲ س/۲ = (جب ب + جب س - جب ا) (جب س + جب ا - جب ب) / ۴ جب ا جب ب

(۳۰) اگر مقادیر ا اور ب اور س میں سے دو مقداریں ایک دوسرے سے بدل جائیں تو جملہ مم ا + جب ا / (جب ب جب س) کی ایک ہی قیمت رہیگی

(۵۴) اگر ا اور ب اور س مثلث کے زاویے ہون اور

جب ا / لا = جب ب / د = جب س / ی تو

(لا - د) مم س/۲ + (د - ی) مم ا/۲ + (ی - لا) مم ب/۲ = ۰

(۵۵) اگر ا + ب + س = م کہ اسمین م کوئی صحیح تو

مس ا + مس ب + مس س = مس ا مس ب مس س

(۵۶) اگر سہ و صہ و مر کوئی سے زاویے ہون تو ثابت کرو کہ

جب سہ + جب صہ + جب مر - ۴ جم سہ/۲ جم صہ/۲ جم مر/۲

= ۲ جب (سہ + صہ + مر - کہ)/۴ [جم (۳ سہ - صہ - مر + کہ)/۴ + جم (۳ صہ - سہ - مر + کہ)/۴ + جم (مر - سہ - صہ + کہ)/۴ + جم (۳ مر + کہ)/۴]

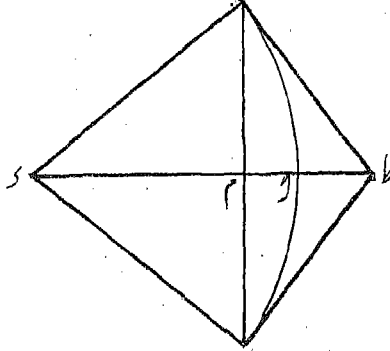
نوان باب

علم مثلثی جدولون کا بنانا

(۱۱۶) اگر بہ قیاس قوسی کسی زاویہ کا ہو اور یہہ زاویہ قائمہ سے کم ہو تو بہ بڑا یہ نسبت جیب بہ کے اور چھوٹا یہ نسبت مس بہ کے ہوگا

فرض کرو کہ کوئی زاویہ ا د ب قائمہ سے کم ہو اور د ب = د ا کے ہو ب سے ب م عمود د ا پر نکالو اور اوسکو س تک ایسا خارج کرو کہ م س = م ب اور ب ط زاویے قائمے بناتا ہوا د ب پر اور د ا ممدودہ سے ط پر ملتا ہوا کھیچو اور س ط ملاؤ مثلثون م د س اور م د ب سب طرح سے آپسمین برابر ہین اسلئے زاویہ ط د س = زاویہ ط د ب اسیواسطے مثلث ط د س اور ط د ب سب طرح سے آپسمین برابر ہین اور ط س د قائمہ ہے اور ط س = ط ب د کے مرکز اور د ب کے نصف قطر پر قوس دائرہ ب ا س کھینچ تو ب ط کو ب پر اور س ط کو س پر مس کریگا

اب اسکو علوم متعارفہ کے طور پر مان لو کہ سب سے چھوٹا قوس ب ا س سے کے ہے تو ب م نصف

ب س کا چھوٹا ب ا نصف قوس ب ا س سے ہوگا اسیواسطے $\frac{\text{ب ا}}{\text{ا ب}}$ کم ہے نسبت $\frac{\text{ب ا}}{\text{د ب}}$ سے کے ہوگا یعنی جیب زاویہ ا د ب کی چھوٹی مقیاس قوسی ا د ب سے ہوگی

اب پہر اس بات کو علوم متعارفہ سمجھ کر مان لیتے ہین کہ قوس ب ا س نسبت مجموعہ دو خطوط خارجی ب ط اور ط س کے کم ہین پس ب ا کم نسبت ب ط کے ہوگا اسیواسطے $\frac{\text{ب ا}}{\text{د ب}}$ چھوٹا $\frac{\text{ب ط}}{\text{د ب}}$ سے ہوا یعنی مقیاس قوسی ا د ب کا چھوٹا مماس ا د ب سے ہوا

اسے معلوم ہوا کہ اگر ر نسبت کچھ کے چھوٹا ہو تو جب ر ا اور ر اور مس ر مین ترتیب تصاعدی بلحاظ مقدار کے ہوگی

(۱۱۷) دفعہ گذشتہ مین ہم نے دو علوم متعارفہ مانے ہین اول تو ظاہر علوم متعارفہ ہی معلوم ہوتا ہے اسلئے اوسکے ماننے مین کچھ کلام نہین ہے مگر دوسرا علوم متعارفہ نہایت مشکل ہے اسلئے بالفعل طالب علم اوسکے سمجھنے کا قصد نکرے پہر اوسکو سمجھے اس بات کا سمجھنا کچھ مشکل نہین ہے کہ اس فرض کا اثبات ایک اور فرض پر موقوف ہی اور وہ وہی فرض ہے جو جو مجبوری دفعہ ۱۴ مین فرض کیا تھا اسواسطے کہ قوس ب ا س کو کتنی ایک قوسون مین تقسیم کرو اور نقاط تقسیم سے مماس نکالو اب اس امر واقعی سے کہ مثلث کے دو ضلع ملکر تیسرے ضلع سے بڑے ہوتے ہین یہہ نتیجہ مستنبط ہوتا ہے کہ یہہ کثیر الاضلاع جو اسطرح بنائی جائیگی اوسکے اضلاع کا مجموعہ ب ط اور س ط کے مجموعہ سے بقدر تفاوت محدود کے کم ہے اور یہہ تفاوت جسقدر تعداد نقاط تقسیم کی زیادہ ہوتی ہے کم ہوتا جاتا ہے

اور دفعہ ۱۱۴ کی جو بات فرض کی تہی وہ یہان ہی فرض کر سکتے ہین کہ تعداد اضلاع کے زیادہ کرنے سے اور مقدار ہر ضلع کے گہٹانے سے ہم کثیر الاضلاع کے مجموعہ ضلع اور قوس ب ا س مین جسقدر فرق کم چاہین کر سکتے ہین پس یہہ نتیجہ نکلا کہ قوس ب ا س مساوی مجموعہ ب ا ط اور ط س سے ہے

(۱۱۸) اگر ہر لانہایت گہٹایا جاے تو جیب ہر / ہر کی حد واحد ہوگی اسواسطے کہ جیب ہر اور ہر اور مس ہر مین ترتیب تصاعیدی بلحاظ مقدار کے ہے جیب ہر پر تقسیم کرو تو ا و جیب ہر / ہر اور جم ہر / ا مین ترتیب تصاعیدی بلحاظ مقدار کے ہے پس جیب ہر / ہر درمیان ا اور ا / جم ہر کے واقع ہے اور جس وقت ہر صفر ہو تو جم ہر واحد ہوگا اسے معلوم ہوا کہ ہر اگر لانہایت گہٹے تو جیب ہر / ہر کی حد واحد کے قریب قریب پہونچیگی اسواسطے جیب ہر / ہر کی ہی حد واحد کے قریب قریب پہونچیگی اور چونکہ مس ہر / ہر = جیب ہر / ہر × ا / جم ہر تو اسے ثابت ہوا کہ جس وقت ہر لانہایت کم ہو تو مس ہر / ہر کی حد بہی واحد شئے قریب قریب پہونچتی ہے

(۱۱۹) اس بات کو بڑی احتیاط سے یاد رکہو کہ دفعہ گذشتہ مقدار ہر نظیر ہر مقیاس قوسی زاویہ کا ہی اگر کوئی اور پیمانہ واحد بجای پیمانہ واحد مقیاس قوسی کے زاویون کے اندازہ کرنیکے واسطے مقرر کیا جاے تو حد مذکور واحد کے قریب قریب نہین پہونچیگی مثلاً فرض کرو کہ ہمکو حد جیب ن / ن کی جب ن لانہایت گہٹایا جاے دریافت کرنی ہے فرض کرو کہ ہر مقیاس قوسی ن درجہ کے زاویہ کا ہے تو ہر = ن ط / ۱۸۰ پس جیب ن / ن = جیب ہر / (۱۸۰ ہر / ط) = ط / ۱۸۰ . جیب ہر / ہر اب جب ن لانہایت گہٹتا ہی تو ہر بہی لانہایت گہٹتا ہی اور حد جیب ہر / ہر کی واحد ہے اسے معلوم ہوا کہ جیب ن / ن کی حد جب ن لانہایت گہٹے ط / ۱۸۰ ہے اور یہہ مقیاس قوسی ایک درجہ کا ہی اور اسیطرح ہم ثابت کر سکتے ہین کہ حد جیب ن / ن جب ن لانہایت گہٹے تو مقیاس قوسی ایک دقیقہ کا ہے اور علی ہذا القیاس

(۱۲۰) اگر نسبت زاویہ قائمہ سے کم ہو تو ثابت کرو کہ جیب ہر بڑی ہر − ہر³ / ۴ سے ہوگی

اسواسطے کہ جب ر = ۲ جب ر/۲ جم ر/۲ اور جس ر/۲ بڑا ہے ر/۲ سے ہے
اسواسطے جب ر/۲ بڑا بہ نسبت ر/۲ جم ر/۲ کے ہی اسواسطے جب ر بڑا بہ نسبت ۲ ر/۲ جم² ر/۲ کے
یعنی بڑا ر جم² ر/۲ یعنی بڑا بہ نسبت ر (۱ − جب² ر/۲) کے ہی اور جب ر/۲ چھوٹا (ر/۲) سے
ہی اسواسطے بدرجہ اولی جب ر بڑا بہ نسبت ر (۱ − ر²/۴) کے ہوا یعنی جب ر بڑا ر − ر³/۴
سے ہوا

(۱۲۱) اوپر کے بیان سے یہہ ظاہر ہوتا ہے کہ اگر ر درمیان صفر اور قائمہ کے ہو تو جب ر چھوٹی بہ نسبت ر کے
اور بڑی بہ نسبت ر − ر³/۴ کے ہوتی ہے اور جم ر = ۱ − ۲ جب² ر/۲ پس جم ر بڑی
بہ نسبت ۱ − ۲ (ر/۲)² یعنی بڑی بہ نسبت ۱ − ر²/۲ کے ہے اور نیز جم ر چھوٹی
۱ − ۲ (ر/۲ − ر³/۳۲)² یعنی چھوٹی بہ نسبت ۱ − ر²/۲ + ر⁴/۱۶ − ۲ (ر³/۳۲)² کے ہے
اسواسطے جم ر بدرجہ اولے چھوٹی بہ نسبت ۱ − ر²/۲ + ر⁴/۱۶ کے ہے

(۱۲۲) جب ۱۰ً کی قیمت تقریبی دریافت کرو

مقیاس قوسی ۱۰ً کا ۱۰ کہ/(۱۸۰×۶۰×۶۰) یعنی کہ/۶۴۸۰۰ ہے اسواسطے جب ۱۰ً کی
چھوٹی بہ نسبت کہ/۶۴۸۰۰ اور بڑی کہ/۶۴۸۰۰ − ۱/۴ (کہ/۶۴۸۰۰)³ کے ہے
اگر ہم کہ کی قیمت تقریبی ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳ وغیرہ لین تو
کہ/۶۴۸۰۰ = ۰٫۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸۱۱۰ وغیرہ اسواسطے جب ۱۰ً کی چھوٹی
اس کسر اعشاریہ سے ہے اور کہ/۶۴۸۰۰ چھوٹا بہ نسبت ۰٫۰۰۰۰۵ کے اسواسطے جب ۱۰ً
کی بدرجہ اولے بڑی بہ نسبت ۰٫۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸۱۱۰ وغیرہا − ۱/۴ (۰٫۰۰۰۰۵)³
یعنی جب ۱۰ً بڑی بہ نسبت ۰٫۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸۰۷۸ کے اب ہم نے دو کسر اعشاریہ
دریافت کین جنکے درمیان جب ۱۰ً کی واقع ہوتی ہے اور ان کسرون مین اول بارہ ہندسے
ملتے ہین اسواسطے ہم یہہ کہہ سکتے ہین کہ

جب ۱۰ً = ۰٫۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸

اورہمکو یہہ تحقیق دریافت ہوگیا ہی کہ اسمین غلطی کم بہ نسبت ۱۰/۱۲۱ کے ہی اور یہہ قیمت جم ۱۰ آ کی تقریباً کیا تو ۱ - جب ۲۰ آ سے جو اوسکے برابر ہے دریافت ہو سکتی ہے یا دفعہ ۱۲۱ کے نتائج کو کام میں لانے سے ہو سکتی ہے پس تیرہ مرتبہ کے اعشاریہ تک یہہ قیمت اوسکی دریافت ہوگی

جم ۱۰ آ = وغیرہا ۹۹۹۹۹۹۹۹۹۸۸۲۴۸ ء

(۱۴۳) اوپر کی دفعہ سے یہہ بات ظاہر ہوتی ہے کہ بارہ مرتبہ کی اعشاریہ تک لو جب ۱۰ آ = مقیاس قوسی ۱۰ آ کے اور اسیطرح ہم ثابت کر سکتے ہین کہ جب آ = مقیاس قوسی آ کے تقریباً اگر ن کوئی چھوٹا عدد ثانیون کے واسطے ہو تو تقریباً قیمت جب ن آ = مقیاس قوسی ن آ = ن گنے مقیاس قوسی آ = ن جب آ

پس ن = مقیاس قوسی ن آ / جب آ تقریباً یعنی چھوٹی زاویہ ثانیون کی تعداد کے برابر تقریباً اسطرح حاصل ہو سکتی ہے کہ مقیاس قوسی زاویہ کو ایک ثانیہ کے جیب پر تقسیم کرین

(۱۴۴) جو زاوئے اوس سلسلہ حسابیہ مین واقع ہون کہ جسکا فرق عام ۱۰ آ ہو اونکو جیوب کے حساب کو ہم نیچے لکھتے ہین

فرض کرو کہ سہ کسی زاویہ کو تعبیر کرتا ہی تو

جب (ن + ۱) سہ + جب (ن - ۱) سہ = ۲ جب ن سہ جم سہ

فرض کرو کہ ۲ جم سہ = ۲ - ک تو

جب (ن + ۱) سہ + جب (ن - ۱) سہ = (۲ - ک) جب ن سہ

اسواسطے جب (ن + ۱) سہ - جب ن سہ = جب ن سہ - جب (ن - ۱) سہ - ک جب ن سہ

اب فرض کرو کہ سہ = ۱۰ آ تو جب سہ اور جم سہ دونو معلوم ہونگے اب ن = ۱ کے رکھو تو ہمکو جب ۲۰ آ - جب ۱۰ آ کی معلوم ہوگی اور اسسے قیمت ۲۰ آ کی معلوم ہوگی اور پھر ن = ۲ کے رکھو تو جب ۳۰ آ - جب ۲۰ آ کے معلوم ہوگی اور اسسے جب ۳۰ آ کی معلوم ہوگی

اور پہر ن = ۳ کے رکہو اور علی ہذا القیاس جوب جو متواتر دریافت ہوتی ہین اونکی ک مین ضرب دینے کے اندر بڑی مشقت پڑتی ہے مگر جم ۱۰ً کی قیمت سے یہہ نتیجہ پیدا ہوتا ہے کہ ک = ۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۵۰۴ء اور اس ک کے چہوٹے ہونے کے سبب سے عمل مین آسانی ہوجاتی ہے

(۱۲۵) جب ۴۵° تک کے زاویون کی جوب کا حساب ہوجائے تو باقی ربعہ کی زاویون کا حساب اس مسئلہ سے بآسانی مستنبط ہوتا ہے کہ

جب (۴۵° + ا) − جب (۴۵° − ا) = ۲ جم ۴۵° جب ا = √۲ جب ا

اسمین جوب جو دریافت ہونگین √۲ کی قیمت تقریبی مین ضرب دینی پڑیگی اور اگر ہم ۶۰° تک کے زاویون کے جوب کا حساب کرین تو باقی ربعہ کے زاویون کا حساب بآسانی تمام اس مسئلہ سے ہوجائیگا کہ

جب (۶۰° + ا) − جب (۶۰° − ا) = ۲ جم ۶۰° جب ا = جب ا

(۱۲۶) جب جوب ربعہ اول کے زاویون کی معلوم ہوگئین تو اس سبب سے کہ جیب التمام ایک زاویہ کی اپنی تمامی کے جیب کے برابر ہوتی ہے جوب التمام تمام زاویون کے ربعہ اول کی معلوم ہوجائیگی اور جوب پر جوب التمام کے تقسیم کرنے سے مماس معلوم ہونگی اور جب مماس ۴۵° سے کم زاویون کے معلوم ہون تو اون ۴۵° سے بڑے زاویون کے مماس اس مسئلہ کی استعانت سے بآسانی معلوم ہوتے ہین کہ

مس (۴۵° + ا) = مس (۴۵° − ا) − ۲ مس ۲ ا

اور اسلئے مس (۴۵° + ا) = مس (۴۵° − ا) + ۲ مس ۲ ا

اور چونکہ مماس التمام اپنی تمامی کا مماس ہوتا ہے اسواسطے مماس التمام بہی زاویون کے معلوم ہوجاینگے اور جوب کے متکافی معلوم کرنے سے قاطع التمام کا حساب بہی لگ جائیگا اور ۴۵° مماسون کے جدولون سے اس سلسلہ کی استعانت سے بآسانی معلوم ہوتے ہین کہ

$$\text{مم}\ ا = \tfrac{1}{2}\ (\text{مس}\ \tfrac{ا}{2} + \text{مم}\ \tfrac{ا}{2})$$

اور قاطع التمام جب معلوم ہوگئی تو اوسکی قاطع الزاویہ بہی معلوم ہوسکتے ہین کیونکہ قاطع الزاویہ قاطع التمام تمامی زاویہ کا ہوتا ہے

(۱۲۷) زاویون کی جوب کے واسطے جو طریقہ حساب کا اختیار کیا گیا ہی اوسمین اول جب ۱۰ً کی بارہ مرتبہ کی اعشاریہ تک دریافت کی گئی تہی اور اوسسے متواتر جب ۲۰ً اور جب ۳۰ً وغیرہا معلوم کی تہی اسسے یہہ نتیجہ نہین نکلتا کہ سب زاویون کی جوب کی قیمتین بارہ مرتبہ کی اعشاریہ تک صحیح ہی ہون اسلئے یہہ بات بڑی فائدہ مند ہی کہ نتائج مستحصلہ کا امتحان کرین کہ وہ کس درجہ اور مرتبہ تک صحیح ہین اور یہہ بہی ضروری بات ہی کہ جو اعمال ان علم مثلثی نسبتونکے دریافت کرنے واسطے کرین اونکی صحت کی بہی جانچ پڑتال کرین اس مطلب کے واسطے ہمکو یہہ کرنا چاہئے کہ جب ہم جب کسی زاویہ کی اس طریقہ کے موافق نکال چکین تو اوس جب کو ایک اور طریقہ سے جو پہلے طریقہ سے کچھہ تعلق نرکہتا ہو نکالین اور دونو نتیجون کا آپسمین مقابلہ کرنے سے عمل کی صحت کا امتحان کرین مثلاً ہمکو معلوم ہے کہ جب ۱۸° = $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ اب اسکا حساب تقریبی جہانتک چاہین کرین اور پہر اوسکو جدول سے مقابلہ کرین اور اس مقابلہ کرنے سے ہمکو معلوم ہو جائیگا کہ کہان تک ان جدولون پر اعتبار ہوسکتا ہی دو صور قانونیہ ایسی ہین کہ اونسے جدول کی صحت کا امتحان ہو جاتا ہے اور اسیواسطے اونکا نام صور اثباتیہ ہے اور وہ یہہ ہین کہ

$$\text{جب}\ ا + \text{جب}\ (۷۲^\circ + ا) - \text{جب}\ (۷۲^\circ - ا) = \text{جب}\ (۳۶^\circ + ا) - \text{جب}\ (۳۶^\circ - ا)$$

$$\text{جم}\ ا + \text{جم}\ (۷۲^\circ + ا) + \text{جم}\ (۷۲^\circ - ا) = \text{جم}\ (۳۶^\circ + ا) + \text{جم}\ (۳۶^\circ - ا)$$

اور یہہ آسانی سے اس طرح ثابت ہوسکتی ہین کہ

$$\text{جب}\ (۷۲^\circ + ا) - \text{جب}\ (۷۲^\circ - ا) = ۲\ \text{جم}\ ۷۲^\circ\ \text{جب}\ ا = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ \text{جب}\ ا$$

$$\text{جب}\ (۳۶^\circ + ا) - \text{جب}\ (۳۶^\circ - ا) = ۲\ \text{جم}\ ۳۶^\circ\ \text{جب}\ ا = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\ \text{جب}\ ا$$

اسواسطے جب ا + جب (۲ ۷۲° + ا) ـ جب (۲ ۷۲° ـ ا) = جب ا + $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ جب ا

$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ جب ا = جب (۳۶° + ا) ـ جب (۳۶° ـ ا)

اسیطرح دوسری صورت بہی ثابت ہوسکتی ہے یا اسی صورت مین ا کی جگہہ ۹۰° ـ ا کے رکہنے سے مطلوب ہاتہہ لگ سکتا ہے

اب ا کی کوئی قیمت مقرر کرکے جدولون سے جوب اور جوب التمام کی قیمتون کو خاص مراتب کے اعشاریہ تک اس صورت قانونیہ اثباتیہ مین مندرج کرین پس اگر جدولین خاص مراتب کے اعشاریہ تک صحیح ہونگین تو وہ اونکی شرایط کو پورا کرینگی

(۱۲۸) علم مثلثی جدولون کی اور کچہہ کیفیت باب آینده مین لکہی جائیگی اور ترکیب ان جدولونکی استعمال کی معلوم ہوگی اب یہان ہم چند مسائل لکہتے ہین جنسے کہ دفعہ ۱۲۱ کے نتایج کی او زیادہ توضیح ہوگی اگرچہ یہہ مسائل دلچسپ مثالین ہین مگر اون سے عملاً کوئی خاص فائدہ نہین حاصل ہوتا

(۱۲۹) ن ایک صحیح عدد ہو اور لد نہایت بڑی ہو تو جم $\frac{لد}{۲}$ جم $\frac{لد}{۴}$ جم $\frac{لد}{۸}$ . . . جم $\frac{لد}{۲^ن}$ کی حد اقصی $\frac{\text{جب لد}}{لد}$ ہوگی

اسواسطے کہ جب لد = ۲ جب $\frac{لد}{۲}$ جم $\frac{لد}{۲}$

= ۴ جب $\frac{لد}{۴}$ جم $\frac{لد}{۴}$ جم $\frac{لد}{۲}$

= ۸ جب $\frac{لد}{۸}$ جم $\frac{لد}{۸}$ جم $\frac{لد}{۴}$ جم $\frac{لد}{۲}$

. . . .

= ۲^ن جب $\frac{لد}{۲^ن}$ جم $\frac{لد}{۲^ن}$ . . . جم $\frac{لد}{۸}$ جم $\frac{لد}{۴}$ جم $\frac{لد}{۲}$

اسواسطے جم $\frac{لد}{۲}$ جم $\frac{لد}{۴}$ جم $\frac{لد}{۸}$ . . . جم $\frac{لد}{۲^ن}$ = $\frac{\text{جب لد}}{۲^ن \text{ جب } \frac{لد}{۲^ن}}$

اب $\frac{\text{جب لد}}{۲^ن \text{ جب } \frac{لد}{۲^ن}} = \frac{\text{جب لد}}{لد} \cdot \frac{\frac{لد}{۲^ن}}{\text{جب } \frac{لد}{۲^ن}}$

اور اسکی حد اقصی جب ن لد نہایت زیادہ ہو $\frac{\text{جب لد}}{لد}$ ہوگی کیونکہ بموجب دفعہ ۱۱۸ کے

حد اقصی $\frac{\text{جب}\,\frac{\text{ل}}{۲^{\text{ن}}}}{\frac{\text{ل}}{۲^{\text{ن}}}}$ واحد ہے اس نتیجہ کو کبھی یولر کا قانون بھی کہتے ہیں

(۱۳۰) اگر کسی مثبت زاویہ کا جو قائمہ سے چھوٹا ہو مقیاس قوسی ل ہو تو ثابت کرو کہ جب ل بڑا $\text{ل} - \frac{\text{ل}^{۳}}{۶}$ سے ہوگا

بموجب دفعہ ۱۲۱ کے جم ل بڑا $۱ - \frac{\text{ل}^{۲}}{۲}$ سے ہے

اسواسطے جم $\frac{\text{ل}}{۲}$ جم $\frac{\text{ل}}{۴}$ بڑا بہ نسبت $\left(۱ - \frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۳}}\right)\left(۱ - \frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۵}}\right)$ سے ہے

اور بدرجہ اولے بڑا $۱ - \left(\frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۳}} + \frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۵}}\right)$ سے ہے

اسواسطے جم $\frac{\text{ل}}{۲}$ جم $\frac{\text{ل}}{۴}$ جم $\frac{\text{ل}}{۸}$ بڑا بہ نسبت $\left[۱ - \left(\frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۳}} + \frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۵}}\right)\right]\left[۱ - \frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۷}}\right]$ کے ہے

اور بدرجہ اولے بڑا $۱ - \left(\frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۳}} + \frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۵}} + \frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۷}}\right)$ سے ہے

اسیطرح عمل کرنے سے ہمکو دریافت ہوتا ہے کہ

جم $\frac{\text{ل}}{۲}$ جم $\frac{\text{ل}}{۴}$ جم $\frac{\text{ل}}{۸}$ . . . جم $\frac{\text{ل}}{۲^{\text{ن}}}$ بڑا بہ نسبت

$۱ - \left(\frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۳}} + \frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۵}} + \frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۷}} + \cdots + \frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۲\text{ن}+۱}}\right)$ کے ہے

یعنی بڑا بہ نسبت $۱ - \frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۳}} \cdot \frac{۱ - \frac{۱}{۲^{۲\text{ن}}}}{۱ - \frac{۱}{۲^{۲}}}$ سے ہے

یعنی بڑا بہ نسبت $۱ - \left(\frac{\text{ل}^{۲}}{۶} - \frac{\text{ل}^{۲}}{۲^{۲\text{ن}+۱} \times ۳}\right)$ کے ہے

اور بدرجہ اولی بڑا $۱ - \frac{\text{ل}^{۲}}{۶}$ کے ہے

اسلئے بموجب دفعہ ۱۲۹ کے

$\frac{\text{جب ل}}{\text{ل}}$ بڑا $۱ - \frac{\text{ل}^{۲}}{۶}$ سے ہے

اسواسطے جب ل بڑا $\text{ل} - \frac{\text{ل}^{۳}}{۶}$ سے ہے

دفعہ ۱۲۱ کی طرح عمل کرنے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ

جم ل چھوٹا $\left(۱ - \frac{\text{ل}^{۲}}{۲} + \frac{\text{ل}^{۴}}{۲۴}\right)$ سے ہے اسرٹ کی علم مثلث کی کتاب دیکھو

امثلہ متفرقہ

(۱) ایک نصف دائرہ کا قطر اب ہے اوسکا س مرکز ہے اوسمیں ع ایک نقطہ ہے ع م عمود اب پر نکالو اور ع ا اور ع ب کہینچو اس طرح عمل شکل سے زاویے ب ع م اور ع ا م مین سے ہر ایک نصف زاویہ ع س ب سے ہے پس اسے یہہ صورت قانونی مستنبط کرو

$$\text{مس}^{۲}\frac{ا}{۲} = \frac{۱ - \text{جم}\, ا}{۱ + \text{جم}\, ا}$$

(۲) اگر $\text{جم}\, بر = \frac{ط\, \text{جم}\, ھ - ص}{ط - ص\, \text{جم}\, ھ}$ تو $\frac{\text{مس}\frac{بر}{۲}}{(ط + ص)^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{\text{مس}\frac{ھ}{۲}}{(ط - ص)^{\frac{۱}{۲}}}$

(۳) اگر $\text{مس}\, بر = ۲\, \text{مس}^{۲} ھر + ۱$ تو $\text{جم}\, ۲بر + \text{جب}^{۲} ھر =$

(۴) اگر $\text{قط}^{۲} بر = ۲\, \text{قط}\, بر\, \text{قم}\, بر$ تو $\text{قم}\, ۲بر = \text{قم}^{۲} بر - \text{قط}^{۲} بر$

(۵) اگر $\text{مس}\, بر = ن\, \text{مس}\, ھر$ تو ثابت کرو کہ $\text{مس}^{۲}(بر - ھر)$ زیادہ $\frac{(ن - ۱)^{۲}}{۴ن}$ سے نہیں ہے

(۶) $\text{جب}\, بر + \text{جب}\, ھر - \text{جم}\, بر\, \text{جب}\,(بر + ھر)$ کی تحویل ایک رقم کی طرف کرو

(۷) ثابت کرو

$$\frac{\text{جب}\, ص\, \text{جم}\, س\, (\text{مس}\, س + \text{مس}\, ص)}{۱ - \text{جم}\,(س + ص)} + \frac{\text{جب}\frac{۱}{۲}(س - ص)}{\text{جم}\, ص\, \text{جب}\frac{۱}{۲}(س + ص)} = ۱$$

(۸) جو شے کہ ایک میل کے فاصلہ پر زاویہ نظری آنکہہ پر ایک دقیقہ کا بنائے اوسکا ارتفاع تقریباً بتلاؤ

(۹) چہہ انچ قطر کا طبق مدور ہے اوسکو کتنی فاصلہ پر آنکہہ سے رکہیں کہ چاند نظر سے چہپ جائے اور یہہ مان لو کہ ظاہری قطر چاند کا نصف درجہ ہے

(۱۰) اگر $\text{جب}\, ۳ا = ن\, \text{جب}\, ا$ کے درست ہو خواہ ا کی کچہہ ہی قیمت سوا صفر اور دو قائمون اور اضعاف دو قائمون کے ہو تو ثابت کرو کہ ن درمیان ۳ اور −۱ کے واقع ہوگا اور اس مساوات کو ن = ۲ کے مانکر حل کرو

(۱۱) اگر $\text{مس}\, بر = \frac{ن\, \text{جب}\, س\, \text{جم}\, س}{۱ - ن\, \text{جب}^{۲} س}$ تو ثابت کرو کہ $\text{مس}\,(س - بر) = (۱ - ن)\, \text{مس}\, س$

(۱۲) اگر $\text{جب}\, ۳بر$ معلوم ہو تو $\text{مس}\, بر$ کی قیمتوں کی تعداد دریافت کرو

(۱۳) ثابت کرو کہ ۶۴ (جم⁸ ا + جب⁸ ا) = جم ۸ ا + ۲۸ جم ۴ ا + ۳۵

(۱۴) بر اور ھر کی ان قیمتون کو دریافت کرو جن سے کہ شرائط مساوات جم بر جم ھر + ۱ = ۰ پوری کرین

(۱۵) اگر ن² جب² (سہ + صہ) = جب² سہ + جب² صہ − ۲ جب سہ جب صہ جم (سہ − صہ) تو ثابت کرو کہ

مس سہ = (۱ ± ن)/(۱ ∓ ن) مس صہ

(۱۶) حد اقصی (جم ۴ بر مم بر)/(جم ۲ بر جم² ۲ بر) کی اوس صورت مین دریافت کرو کہ بر لانہایت کم ہو

ان مساواتون کو حل کرو

(۱۷) جب بر + جم بر = √۲

(۱۸) √۳ جب بر − جم بر = √۲

(۱۹) جب ۲ بر = جم بر

(۲۰) (۴ − √۲) (قط بر + مم بر) = ۴ (جب بر مس بر + جم بر مم بر)

(۲۱) جم بر − جم ۲ بر = جب ۳ بر

(۲۲) جم بر − مس بر = جم بر + جب بر

(۲۳) ۴ جب² بر + جب² ۲ بر = ۲

(۲۴) مس بر + ۲ مم بر = جب بر (۱ + مس بر مس بر/۲)

(۲۵) جب² ۲ بر − جب² بر = جب² ط/۶

(۲۶) قم بر = قم ط/۲

(۲۷) جم بر جم ۳ بر = جم ۵ بر جم ۷ بر

(۲۸) جب بر جب ۳ بر = ۱/۲

(۲۹) ۴ جب² بر + جب² ۲ بر = ۳

(۳۰) (۱ − مس بر) (۱ + جب ۲ بر) = ۱ + مس بر

(۳۱) جب بر + جب ۲ بر + جب ۳ بر + جب ۴ بر =

(٣٢) جب بر − جم بر = ٤ جب بر جم^٢ بر

(٣٣) (مم بر − مس بر)^٢ (٢ − $\sqrt{٣}$) = ٤ (٢ + $\sqrt{٣}$)

(٣٤) ٢ $\sqrt{٣}$ جم ($\frac{ط}{٣}$ − بر) (١ + جب بر) = ١ + جم ٢ بر

(٣٥) جب ٩ بر + جب ٥ بر + ٢ جا بر = ١

باب دہم

لوکارثم

(١٣١) لوکارثم کی ذات صفات سے واقف ہونا اور اوسکے حساب کے طریقونکو جاننا ہی طالب علم کو ضرور ہے اسلیے اس علم کے ہر رسالہ مین ان مضامین سے متعلق بہی ایک باب ہوتا ہی

(١٣٢) فرض کرو کہ $ا^{لد}$ = ن تو لد کو لوکارثم ن کے موافق اساس ا کی کہتے ہین پس لوکارثم کسی عدد کے موافق اساس معلوم کی وہ قوت نما ہی کہ جسکے موافق اساس قوت مین اٹہنے سے برابر اوس عدد کے ہوجاے

لوکارثم ن کے موافق اساس ا کی اسطرح لکہی جاتی ہے کہ لوک$_ا$ ن پس لوک$_ا$ ن = لد سے وہی ربط معلوم ہوتا ہے جو $ا^{لد}$ = ن سے سمجہا جاتا ہے

(١٣٣) مثلاً $٣^٤$ = ٨١ پس ٤ لوکارثم ٨١ کی موافق اساس ٣ کے ہے

اگر اعداد ١ و ٢ و ٣ . . . وغیرہ کی لوکارثم موافق اساس معلوم کے مثلاً ١٠ کے دریافت کرنی ہون تو ان مساواتون کو کہ $١٠^{لد}$ = ١ اور $١٠^{لد}$ = ٢ اور $١٠^{لد}$ = ٣ . . . متواتر حل کرین اب ہم دوسرے باب مین ذکر کرینگے کہ یہہ حل تقریبی ہونگے یعنی گو قیمت لد کی ایسی نہین دریافت کرسکتے کہ $١٠^{لد}$ = ٣ کی تحقیقاً ہو لیکن قیمت لد کی ایسی دریافت کرسکتی ہین کہ $١٠^{لد}$ اور ٣ مین فرق جتنا چاہین کم رہے غرض تقریبی قیمت لد کی معلوم ہوسکتی ہے تحقیقی قیمت نہین معلوم ہوگی

اب ہم چند خواص لوکارثم کے ثابت کرتے ہین

(۱۳۴) خواہ اساس کچھہ ہی لوکارثم اکی صفر ہوتی ہے

اسواسطے کہ $ا^{\circ}$ = ا جب لا = ۰

(۱۳۵) لوکارثم اساس کی ایک ہوتی ہے

اسواسطے کہ $ا^{لا}$ = ا جب لا = ۱

(۱۳۶) لوکارثم حاصلضرب کی برابر ہوتی ہے اوسکے اجزاء ضربی کے لوکارثمون کے مجموعہ کے

اسواسطےکہ فرض کرو لا = لوک$_ا$ م اور ی = لوک$_ا$ ن

اسواسطے م = $ا^{لا}$ اور ن = $ا^{ی}$

اسواسطے م ن = $ا^{لا} ا^{ی}$ = $ا^{لا+ی}$

اسواسطے لوک$_ا$ م ن = لا + ی = لوک$_ا$ م + لوک$_ا$ ن

(۱۳۷) لوکارثم خارج قسمت کے برابر ہوتی ہے اوس حاصل تفریق کے جو مقسوم کی لوکارثم مین مقسوم علیہ کی لوکارثم گہٹانے سے حاصل ہو

اسواسطے کہ فرض کرو لا = لوک$_ا$ م اور ی = لوک$_ا$ ن

اسواسطے م = $ا^{لا}$ اور ی = $ا^{ن}$

اسواسطے $\frac{م}{ن}$ = $\frac{ا^{لا}}{ا^{ی}}$ = $ا^{لا-ی}$

اسواسطے لوک$_ا$ $\frac{م}{ن}$ = لا − ی = لوک$_ا$ م − لوک$_ا$ ن

(۱۳۸) لوکارثم کسی عدد کی قوت کا خواہ صحیح ہو خواہ کسر برابر ہوتا ہے اوس عدد کے لوکارثم اور اوس قوت نما کے حاصلضرب کے

اسواسطے کہ فرض کرو م = $ا^{لا}$ اسواسطے $م^{ر}$ = $(ا^{لا})^{ر}$ = $ا^{لار}$

اسواسطے لوک$_ا$ $(م^{ر})$ = لا ر = ر لوک$_ا$ م

(۱۳۹) ایک ہی عدد کے مختلف الاساس لوکارثمون مین جو ارتباط ہو اوسے دریافت

فرض کرو کہ لا = لوک$_{ا}$ م اور ی = لوک$_{ب}$ م

اسواسطے م = ا^{لا} اور = ب^{ی}

اسواسطے ا$^{\frac{لا}{ی}}$ = ب

اسواسطے ا$^{\frac{لا}{ی}}$ = ب اور ب$^{\frac{ی}{لا}}$ = ا

اسواسطے $\frac{لا}{ی}$ = لوک$_{ا}$ ب اور $\frac{ی}{لا}$ = لوک$_{ب}$ ا

اسنے معلوم ہوا کہ ی = لا لوک$_{ب}$ ا اور = $\frac{لا}{لوک_{ا} ب}$

پس اسنے ثابت ہوا کہ لوکارثم ایک عدد کے موافق اساس ب کسی اسطرح معلوم ہوسکتی ہے کہ اوس عدد کے لوکارثم موافق اساس ا کے لیکر لوک$_{ب}$ ا مین یا $\frac{1}{لوک_{ا} ب}$ مین ضرب دین

اور یہہ بہی معلوم رہے کہ لوک$_{ب}$ ا × لوک$_{ا}$ ب = ۱

(۱۴۰) عملی حسابون مین صرف اساس ۱۰ کام آتی ہے اور جو لوکارثمین موافق اساس ۱۰ کے پائی جاتی ہین اونکو لوکارثم مروج کہتے ہین آگے کی دو دفعات مین ہم بتلاینگے کہ اسکی اساس مقرر کرنمین کیا فائدہ ہے ان تعریفات کی آگے ضرورت پڑیگی کہ لوکارثم کے صحیح حصہ کو عدد بیانی لوکارثم کا کہتے ہین اور جو اعشاریہ لوکارثم مین ہوتی ہے اوسکو اعشاریہ لوکارثمی کہتے ہین

(۱۴۱) لوکارثم مروج مین اگر کسی عدد کی لوکارثم معلوم ہو تو ہم فوراً لوکارثم اوس عدد اور ۱۰ کی کسی قوت کے حاصلضرب کی دریافت کرسکتے ہین

اسواسطے کہ لوک$_{۱۰}$ ۱۰^{ن} × ع = لوک$_{۱۰}$ ع + لوک ۱۰^{ن} = لوک$_{۱۰}$ ع + ن

لوک$_{۱۰}$ $\frac{ع}{۱۰^{ن}}$ = لوک$_{۱۰}$ ع − لوک ۱۰^{ن} = لوک ع − ن ہے

یعنی اگر ہم لوکارثم کسی عدد کی جانتے ہون تو ہم اوسی لوکارثم اوس عدد کی دریافت کرسکتے ہین جسمین ہندسے تو وہی ہون جو پہلے عدد مین تہے اور علامت اعشاریہ کے مقام مین فرق ہو

(۱۴۲) لوکارثم مروج مین لوکارثم کا عدد بیانی فقط دیکہنے سے تحقیق ہوجاتا ہے وجہ

اسکی یہ ہے کہ فرض کرو عدد بڑا ایک سے ہو اور $۱۰^{ن}$ اور $۱۰^{ن+۱}$ کے درمیان واقع ہو تو اوسکی لوکارثم ن سے بڑی اور ن + ۱ سے چھوٹی ہوگی اسواسطے عدد بیانی لوکارثم کا ن ہوگا

دوم فرض کرو کہ عدد ایک سے کم ہو اور درمیان $\frac{۱}{۱۰^{ن}}$ اور $\frac{۱}{۱۰^{ن+۱}}$ کے واقع ہو یعنی $۱۰^{-ن}$ اور $۱۰^{-ن-۱}$ کے درمیان واقع ہو تو اوسکی لوکارثم بعض منفی مقدار درمیان − ن اور − (ن + ۱) کے واقع ہوگی اگر ہم اس بات پر اتفاق کرلین کہ اعشاریہ لوکارثمی ہمیشہ مثبت ہوا کرے تو عدد بیانی لوکارثم کا − (ن + ۱) ہوگا

(۱۴۳) لا کو ایک سلسلہ مین پھیلاؤ جسمین لا کی قوتین بتدریج بڑہتی جائین یعنی ایک عدد کو اوسکی لوکارثم کے قوا رتصاعیدی مین موافق اساس معلوم کے پھیلاؤ

$$ا^{لا} = \left[۱ + (ا - ۱)\right]^{لا} = ۱ + لا (ا - ۱) + \frac{لا (لا - ۱)}{۱ \times ۲} (ا - ۱)^{۲}$$

$$+ \frac{لا (لا - ۱)(لا - ۲)}{۱ \times ۲ \times ۳} (ا - ۱)^{۳} + \frac{لا (لا - ۱)(لا - ۲)(لا - ۳)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴} (ا - ۱)^{۴}$$

$$= ۱ + لا \left[ا - ۱ - \frac{۱}{۲}(ا - ۱)^{۲} + \frac{۱}{۳}(ا - ۱)^{۳} - \frac{۱}{۴}(ا - ۱)^{۴} \ldots\right]$$

+ ارقام جنمین $لا^{۲}$ اور $لا^{۳}$ وغیرہ شامل ہون

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ $ا^{لا}$ ایک سلسلہ مین پھیلتا ہے کہ اوسکا آغاز ۱ سے ہوتا ہے اور بتدریج قوا لا کے بڑہتے جاتے ہین اسواسطے ہم فرض کرسکتے ہین

$$ا^{لا} = ۱ + ح_{۱} لا + ح_{۲} لا^{۲} + ح_{۳} لا^{۳} + ح_{۴} لا^{۴} + \ldots$$

اسمین $ح_{۱}$ و $ح_{۲}$ و $ح_{۳}$ . . . ہین وہ مقادیر ہین جو لا پر موقوف نہین ہیں اسواسطے اونمین لا کے متغیر ہونے سے کچھہ تغیر نہین واقع ہوتا

$$ح_{۱} = ا - ۱ - \frac{۱}{۲}(ا - ۱)^{۲} + \frac{۱}{۳}(ا - ۱)^{۳} - \frac{۱}{۴}(ا - ۱)^{۴} + \ldots$$

اور $ح_{۲}$ اور $ح_{۳}$ ہنوز نامعلوم ہین اب اونکی قیمت دریافت کرتے ہین لا کو لا + ک سے

بدل دو تو

$$ا^{لا+ی} = ۱ + ح_۱(لا+ی) + ح_۲(لا+ی)^۲ + ح_۳(لا+ی)^۳ + \dots$$

لیکن $ا^{لا+ی} = ا^{لا} ا^{ی} = ا^{ی}\left[۱ + ح_۱ لا + ح_۲ لا^۲ + ح_۳ لا^۳ + \dots\right]$

چونکہ $ا^{لا+ی}$ کے دونو صورتین مفصلہ مساوات متطابقہ ہین تو ہم لا کے سرون کو دونو جملون مین آپسمین برابر فرض کرسکتے ہین

$$ح_۱ + ۲ح_۲ ی + ۳ح_۳ ی^۲ + ۴ح_۴ ی^۳ + \dots = ح_۱ ا^{ی}$$

$$= ح_۱\left[۱ + ح_۱ ی + ح_۲ ی^۲ + ح_۳ ی^۳ + \dots\right]$$

پس

اس مساوات متطابقہ مین ہم فرض کرسکتے ہین کہ ی کے متماثل قوار کے سر آپسمین برابر ہین

$۲ح_۲ = ح_۱^۲$ اسیواسطے $ح_۲ = \frac{ح_۱^۲}{۲}$

$۳ح_۳ = ح_۱ ح_۲$ اسیواسطے $ح_۳ = \frac{ح_۱ ح_۲}{۳} = \frac{ح_۱^۳}{۱\times۲\times۳}$

$۴ح_۴ = ح_۱ ح_۳$ اسیواسطے $ح_۴ = \frac{ح_۱ ح_۳}{۴} = \frac{ح_۱^۴}{۱\times۲\times۳\times۴}$

. . . .

پس $ا^{لا} = ۱ + ح_۱ لا + \frac{ح_۱^۲ لا^۲}{|۲} + \frac{ح_۱^۳ لا^۳}{|۳} + \frac{ح_۱^۴ لا^۴}{|۴} + \dots$

چونکہ یہ نتیجہ سب قیمتون کے واسطے صحیح ہے تو لا کو ایسا فرض کرو کہ $ح_۱ لا = ۱$ تو $لا = \frac{۱}{ح_۱}$ اور

$$ا^{\frac{۱}{ح_۱}} = ۱ + ۱ + \frac{۱}{|۲} + \frac{۱}{|۳} + \frac{۱}{|۴} + \dots$$

اس سلسلہ کو اکثر ی سے تعبیر کرتے ہین پس $ا^{\frac{۱}{ح_۱}} = ی$ اور اسیواسطے $ا = ی^{ح_۱}$ اور

$ح_۱ = لوک_ی ا$ پس اسے معلوم ہوا کہ

$$ا^{لا} = ۱ + (لوک_ی ا) لا + \frac{(لوک_ی ا)^۲ لا^۲}{|۲} + \frac{(لوک_ی ا)^۳ لا^۳}{|۳} + \dots$$

اسکو ضابطہ قوت نمائی کہتے ہین

ی کو ا کی جگہہ لکھو تو $لوک_ی ا$ کی $لوک_ی ی$ ہو جائگی یعنی بموجب دفعہ ۲۳۵ کے ایک ہو جائگی

پس $ی^{لا} = ۱ + لا + \frac{لا^۲}{|۲} + \frac{لا^۳}{|۳} + \frac{لا^۴}{|۴} + \dots$

یہہ ایک نتیجہ اعظم ہے اور لا کی ساری قیمتوں کے واسطے درست ہے اور طالب علم کو اتنی واقفیت اس نتیجہ سے ضرور ہونی چاہئے کہ جہاں اوسکی خاص صورتوں میں ضرورت پڑے تو وہ اوسکو کام میں لا سکے

مثلاً فرض کرو کہ لا = -۱ تو

ی^{-۱} یعنی ۱/ی = ۱/⌊۲ - ۱/⌊۳ + ۱/⌊۴ - ۱/⌊۵ + ...

یا ہم لا کی جگہہ کوئی اور رمز مقرر کر سکتے ہیں مثلاً ن ط بجای لا کے رکہیں تو

ی^{ن ط} = ۱ + ن ط + ن^۲ ط^۲/⌊۲ + ن^۳ ط^۳/⌊۳ + ن^۴ ط^۴/⌊۴ + ...

اور جو تحقیقات لکہی ہے اوسکی ایک جز کی نسبت جبر مقابلہ کے امثال غیر المعین کے باب میں دیکہیں

(۱۴۴) جس سلسلہ کو برابر ی کے فرض کیا ہے اوسکا حساب اگر درحقیقت لگائیں تو وہ تقریباً برابر ۲،۷۱۸۲۸۱۸۲۸ وغیرہ کے ہوگا

(۱۴۵) لوک ی (۱ + لا) کی ایسے سلسلہ میں دریافت کرو کہ اوسمیں قوا لا کی تبدریج بڑہتی جائیں

دفعہ ۵۴۲ میں ہمنے بیان کیا ہے کہ ح = لوک ی ا یعنی بموجب اسی دفعہ

لوک ی ا = ا - ۱ - ½ (ا - ۱)^۲ + ⅓ (ا - ۱)^۳ - ¼ (ا - ۱)^۴ + . . .

ا کی جگہہ ۱ + لا لکہہ تو اسّے معلوم ہوتا ہے کہ

لوک ی (۱ + لا) = لا - لا^۲/۲ + لا^۳/۳ - لا^۴/۴ + ...

اگر لا کسر واجب ہو تو لوک ی (۱ + لا) کا حساب اس سلسلہ سے ہو سکتا ہے لیکن اگر لا بہت چھوٹا نہو تو ارقام سلسلہ ایسے آہستہ آہستہ کم ہونگیں کہ بہت سے تعداد رقموں کی رکہنی پڑیگی جب حساب لگیگا اور اگر لا بڑا ایک سے ہو تو پہر یہہ سلسلہ بالکل ہمارے مطلب کے لئے غیر مناسب ہوگا اور اوس سے کچہہ کام نہیں نکلیگا اسیواسطے ایک اور قانون جس سے بآسانی مطلب نکلے استنباط کرتے ہیں

(۱۴۶) ہمکو معلوم ہے کہ لوک ی (۱ + لا) = لا - لا^۲/۲ + لا^۳/۳ - لا^۴/۴ + ...

اسیواسطے لوک ی (۱ - لا) = - لا - لا^۲/۲ - لا^۳/۳ - لا^۴/۴ + ...

تفریق کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لوک ی (۱ + لا) لوک ی (۱ - لا) یعنی لوک (۱ + لا)/(۱ - لا) حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک ی}\ \frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}} = 2\left[\text{لا} + \frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^5}{5} + \cdots\right]$$

اس سلسلہ مین $\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}$ کو لا کی جگہہ لکھو تو $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ بجای $\frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}}$ کے ہوگا

پس $$\text{لوک ی}\ \frac{\text{م}}{\text{ن}} = 2\left[\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}\right)^5 \cdots\right] \cdots (1)$$

اب ن = ۱ کے رکہو تو $$\text{لوک ی م} = 2\left[\frac{\text{م}-1}{\text{م}+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{\text{م}-1}{\text{م}+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\text{م}-1}{\text{م}+1}\right)^5 + \cdots\right] (2)$$

اب پہر (۱) مین م = ن + ۱ کے رکہو تو اوس سے قیمت لوک ی $\frac{\text{ن}+1}{\text{ن}}$ کی دریافت ہوگی اسیواسطے

$$\text{لوک ی}\ (\text{ن}+1) - \text{لوک ی ن} = 2\left[\frac{1}{2\text{ن}+1} + \frac{1}{3(2\text{ن}+1)^3} + \frac{1}{5(2\text{ن}+1)^5} + \cdots\right] \cdots (3)$$

(۱۴۷) دفعہ گذشتہ کے سلسلہ (۲) سے لوکارثم ۲ کی ہم دریافت کرسکتے ہین م = ۲ کے رکہو اور حساب کرو تو لوک ی ۲ = 0.69314718 وغیرہ

اگر دو متصل اعداد مین سے ایک عدد کی لوکارثم معلوم ہو تو اوس سے دوسرے عدد کی لوکارثم معلوم ہوسکتی ہے ن = ۲ کے رکہو تو لوک ی ۲ کی قیمت معلوم ہونے سے ہمکو یہہ حاصل ہوگا

لوک ی ۳ = 1.09861229 وغیرہ

ن = ۹ کے سلسلہ (۳) مین رکہو تو لوک ی ن = لوک ی ۹ = لوک ی 3^2 = ۲ لوک ی ۳ پس اس سے لوکارثم ۹ کی معلوم ہوگی اور جب ۹ کی لوکارثم معلوم ہوگی تو اوس سے ۱۰ کی لوکارثم معلوم ہوگی کہ

لوک ی ۱۰ = 2.30258509 وغیرہ

(۱۴۸) لوکارثم جو موافق اساس ی کی لیجاتی ہے اوسکو نپیری لوکارثم کہتے ہین اسواسطے کہ لوکارثم کو نپیر صاحب نے ایجاد کیا تہا اور اوسکو لوکارثم طبعی بہی کہتے ہین کیونکہ جہان تحقیقات لوکارثمی حساون کی ہوتی ہے وہان ہی لوکارثمین کام مین آتی ہین اساس ۱۰ کے موافق جو لوکارثمین مرتب ہوتی ہین وہ عملیات مین اور نپیری لوکارثمین نظریات مین بہت کارآمد ہین

(۱۴۹) دفعہ ۱۳۹ مین بیان ہوا ہے کہ لوکارثم موافق اساس ۱۰ کے کسی عدد کی نپیری لوکارثم کو $\frac{1}{\text{لوک ی}\ 10}$ مین یعنی $\frac{1}{2.30258509}$ یعنی 0.43429448 مین ضرب دینے سے حاصل ہوسکتی ہے اس عدد کو مضروب معین یا قالب لوکارثم مروج کا کہتے ہین

دفعہ ۱۴۶ کے سلسلے ایسے مرتب ہو سکتے ہیں کہ ان سے لوکارثم مروجہ بہی دریافت ہو جائیں مثلاً بالکل سلسلہ (۳) کو مضروب معین میں جسکو ہم لب سے تعبیر کرتے ہیں ضرب دیدو تو

$$\text{لب لوگ}_{ی}(ن+1) - \text{لب لوگ}_{ی} ن = 2\text{لب}\left[\frac{1}{2ن+1} + \frac{1}{3(2ن+1)^3} + \frac{1}{5(2ن+1)^5} + \cdots\right]$$

یعنی

$$\text{لوگ}_{1}(ن+1) - \text{لوگ}_{1} ن = 2\text{لب}\left[\frac{1}{2ن+1} + \frac{1}{3(2ن+1)^3} + \frac{1}{5(2ن+1)^5} + \cdots\right]$$

(۱۴۹) مقدار ی کی متبائن ہوتی ہے

اسواسطے کہ اگر متبائن نہو تو بشرط امکان فرض کرو کہ ی = $\frac{م}{ن}$ جسمین م اور ن صحیح اعداد ہیں پس

$$\frac{م}{ن} = 2 + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}} + \cdots$$

طرفین مساوات کو $\underline{|ن}$ میں ضرب دو تو

$$م \underline{|ن-1} = \text{ایک صحیح} + \frac{1}{ن+1} + \frac{1}{(ن+1)(ن+2)} + \frac{1}{(ن+1)(ن+2)(ن+3)} + \cdots$$

لیکن $\frac{1}{ن+1} + \frac{1}{(ن+1)(ن+2)} + \frac{1}{(ن+1)(ن+2)(ن+3)}$

ایک کسر ہے اسلئے کہ وہ $\frac{1}{ن+1}$ سے بڑی ہے اور اس سلسلہ ہندسیہ سے چھوٹی ہے

$$\frac{1}{ن+1} + \frac{1}{(ن+1)^2} + \frac{1}{(ن+1)^3} + \cdots$$

یعنی کم بہ نسبت $\frac{1}{ن}$ کے ہے

پس حاصل تفریق دو صحیح عددون کا برابر ایک کسر کے ہوا اور یہہ باطل ہے اسواسطے ی متبائن ہے

(۱۵۰) اب ہم دو حد اقصی کے باب میں تحقیقات کرکے اس باب کو ختم کرتے ہیں یہہ تحقیقات آئندہ بڑی بکار آمد ہے جبکہ ن لانہایت زیادہ ہو حد اقصی $(\text{جم}\,\frac{س}{ن})^{ن}$ کی دریافت کرو

فرض کرو کہ و = $(\text{جم}\,\frac{س}{ن})^{ن} = (1-\text{جب}^2\frac{س}{ن})^{\frac{ن}{2}}$ تو

$$\text{لوک و} = \text{لوک}\left(1-\text{جب}^2\frac{س}{ن}\right)^{\frac{ن}{2}} = \frac{ن}{2}\,\text{لوک}\left(1-\text{جب}^2\frac{س}{ن}\right)$$

$$= -\frac{ن}{2}\left(\text{جب}^2\frac{س}{ن} + \frac{1}{2}\text{جب}^4\frac{س}{ن} + \frac{1}{3}\text{جب}^6\frac{س}{ن} + \cdots\right)$$

جس وقت کہ ن لانہایت زیادہ ہو بموجب دفعہ ۱۱۸ کے

$$ن\,\text{جب}\,\frac{س}{ن} = س\,\frac{\text{جب}\frac{س}{ن}}{\frac{س}{ن}} = س$$

اسیواسطے آخر کو ن جب ب/ن = سہ جب س/ن = ۰ اور ایسی ہی
ن جب^۴ س/ن و ن جب^۶ س/ن ۰۰۰ آخر کو فنا ہو جاینگے اسیواسطے لوک یو = ۰
اسیواسطے یو = ۱ پس مطلوب حد اقصی واحد ہے

جبکہ ن لانہایت زیادہ ہو $\left(\frac{\text{جب } س/ن}{س/ن}\right)^{ن}$ کی حد اقصی دریافت کرو

بموجب دفعہ ۱۱۶ کے جب س/ن چھوٹا بہ نسبت ۱ کے اور بڑا بہ نسبت
جب س/ن / س/ن کے یعنی بڑا بہ نسبت جم س/ن کے ہے اسسے معلوم ہوا کہ $\left(\text{جب } س/ن / س/ن\right)^{ن}$
چھوٹا بہ نسبت ۱^ن یعنی ۱ کے اور بڑا بہ نسبت (جم س/ن)^ن کے اور موجب دفعہ گذشتہ کے
حد اقصی (جم س/ن)^ن کی واحد ہی اسیواسطے حد $\left(\frac{\text{جب } س/ن}{س/ن}\right)$ حد اقصی واحد ہے

امثلہ متفرقہ

(۱) موافق اساس ۲√۲ کے لوکارثم ۱۲۸ کی دریافت کرو

(۲) موافق اساس ۳√۳ کے لوکارثم ۲۴۳ ۳√۹ کی دریافت کرو

(۳) لوک$_{۳}$ ۲۱۸۷ اور لوک$_{۱۰}$ ۰۰۰۱ء اور لوک$_{۲}$ جم ۴۵° کی دریافت کرو

(۴) اس مساوات $۵^{۳-۲لا} = ۲^{لا+۳}$ سے قیمت لا کی تقریباً دریافت کرو
اور معلوم ہے کہ لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰ء

(۵) معلوم ہے کہ لوک ۲ ۴ = ط اور لوک ۱۲۵ = ص لوک ۲ اور لوک ۷ کی دریافت کرو

(۶) عدد بیانی لوک$_{۶}$ ۳۵ ۷ اور لوک$_{۶}$ ۴√۷۲۵۰ء کا دریافت کرو

(۷) معلوم ہے کہ لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰ء اور لوک ۵ = ۴۰۵ = ۶۰۷۴۵۵ء ۲ لوکارثم ۰۰۳ء کی
دریافت کرو

(۸) معلوم ہے کہ لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء اور لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸ء تو لوک ۹۸
اور لوک $\left(\frac{۴}{۳\sqrt{۴۳}}\right)^{۱/۳}$ کو دریافت کرو

(۹) معلوم ہے کہ لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء کہ لوک ۳ = ۴۷۷۱۲ء تو لوک (۰۰۷۲۰۳۶ء۲)^۳
دریافت کرو

(۱۰) اس سلسلہ کا حاصل جمع دریافت کرو

۲/|۳ + ۴/|۵ + ۶/|۷ + ۰۰۰ لانہایت

(۱۱) ثابت کرو کہ

ی/۲ = ۱/|۲ + (۱+۲)/|۳ + (۱+۲+۳)/|۴ + (۱+۲+۳+۴)/|۵ + ۰۰۰ لانہایت

لا کو ان چھ مساواتوں سے دریافت کرو

(۱۲) ۴ جب لا جب (لا − سہ) = ۲ جم سہ − ۱

(۱۳) جم صہ √(ط۲ − لا۲) + ط لا جب سہ = لا جب صہ

(۱۴) جب سہ + جب (لا − سہ) + جب (۲ لا + سہ) = جب (لا + سہ) + جب (۲ لا − سہ)

(۱۵) جم (لا + ۳/۲) سہ + جم (لا + ۱/۲) سہ = جب سہ

(۱۶) لا۲ جم سہ جم (سہ − صہ/۲) + لا جم (سہ − صہ) = ۲ جم صہ/۲

(۱۷) جم لا−۱ سہ − جم لا/۲ سہ = جم ۳ سہ

(۱۸) اس مساوات م جب بر = ن جب (سہ − بر) کو حل کرو

(۱۹) اس مساوات جم ن بر + جم (ن − ۲) بر = جم بر کو حل کرو

(۲۰) اس مساوات کو حل کرو اور ثابت کرو کہ سات مثبت قیمتیں بر کی بڑی ۰ سے اور چھوٹی ۲ ی سے ہیں جب بر + جب ۲ بر = جب ۳ بر + جب ۴ بر

(۲۱) مساوات مس لا = مس صہ مس (سہ + لا) میں مس لا کو دریافت کرو اور ثابت کرو کہ مس لا کے اصلی ہونیکے واسطے ضرور ہے کہ مس صہ درمیان (قطسہ − مس سہ)۲ اور (قطسہ + مس سہ)۲ کے نہ واقع ہو

(۲۲) کم از کم قیمت بر کی دریافت کرو جسے شرائط اس مساوات کی پوری ہوں

مس (کہ − بر) + مس (کہ + بر) = (۸ ہ ۲ / (۱ + ہ ۲))^(۱/۲)

(۲۳) معلوم ہے کہ جب۲ (ن + ۱) بر = جب۲ ن بر + جب۲ (ن − ۱) بر اسمیں

(ن + ١) بر اور ن بر اور (ن − ١) بر مثلث کے زاویے ہین تو ن کی صحیح قیمت دریافت کرو

(٢٤) اس مساوات کا اختصار کرو اور اوسکا حل بھی کرو

جم^٢ بر − جم^٢ سہ = ٢ جم^٣ بر (جم بر − جم سہ) − ٢ جب^٣ بر (جب بر − جب سہ)

(٢٥) ثابت کرو کہ سب زاویے جنکی جیب وہی ہے جو سہ کی ہے اس صورت

(٢ن + ١/٢) ط ± (ط/٢ − سہ) مین داخل ہین

(٢٦) ثابت کرو کہ تمام زاویے جنکی وہی جیب التمام ہے جو سہ کی ہے اس صورت

(ن + ١/٢) ط + (−١)^ن (سہ − ط/٢) مین داخل ہین

(٢٧) جم ا/٢ − جب ا/٢ = ± √(١ − جب ا) مین بجای علامت مشتبہ کے (−١)^م کے رکھہ سکتے ہین اسمین م سب سے بڑا وہ صحیح عدد ہے جو (ا + ٢٧٠)/٣٦٠ مین داخل ہے اور ا درجون مین بیان کیا گیا ہے

(٢٨) مس ا/٢ = ± (√(١ + مس^٢ ا) − ١) / مس ا مین بجای علامت مشتبہ کے (−١)^م مندرج ہوسکتی اسمین م وہ سب سے بڑا صحیح عدد ہے جو (ا + ٩٠)/١٨٠ مین داخل ہے اور ا درجون مین بیان کیا گیا ہے

(٢٩) اگر مس (جم لا) = جم (مس لا) تو ثابت کرو کہ اصلی قیمتین لا کی جب ٢ لا = ٤ / ((٢ن + ١) ط) سے معلوم ہوسکتی ہین اور اسمین ن ہر ایک صحیح عدد سوا −١ کے ہو سکتا ہے

(٣٠) جم ا کی رقمون مین جم ا/٢ کو بتاؤ کسطرح بیان کرین اسمین ان کوئی مثبت صحیح عدد ہے

(٣١) مساوات جم لا = √((١ + جم ٢ لا)/٢) سے جب لا کے واسطے کوئی صورت جب ٢ لا کی رقمون مین دریافت کرو اور بتلاؤ کہ جذر پر کیا مناسب علامت ہوتی ہے

(٣٢) اگر جملہ (ا جم (بر + سہ) + ب جم (بر + صہ)) / (ا' جب (بر + سہ) + ب' جم (بر + صہ)) مین ایک ہی قیمت بر کی سب قیمتون کے واسطے رہی تو

ا ا' − ب ب' = (ا' ب − ا ب') جب (سہ − صہ)

(۳۳) اگر مجموعہ دو زاویون کا معلوم ہو تو ثابت کرو کہ مجموعہ اونکے جیوب کا نہایت بڑا اور مجموعہ اونکے مماسون کا نہایت کم اوس صورتمین ہوگا کہ زاویے آپسمین برابر ہون

(۳۴) اگر ا + ب + س = ۹۰ تو ثابت کرو کہ مس ۲ ا + مس ۲ ب + مس ۲ س کی کم از کم قیمت واحد ہے

(۳۵) اگر ا + ب + س = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ تم ۲ ا + تم ۲ ب + تم ۲ س کی قیمت کم از کم واحد

(۳۶) اگر ا + ب + س = ۱۸۰° تو

۲ تم ا + ۲ تم ب + ۲ تم س بڑا بہ نسبت

تم ا + تم ب + تم س کے ہے

(۳۷) مساوات جم ۲ ا + جم ۲ ب + جم ۲ س = ا کی شرائط کو جو تین حادی زاویے پورا کرین اور انکا مجموعہ ۱۸۰° سے چھوٹا ثابت کرو

(۳۸) اگر ہریک زاویہ ا اور ب اور س مین سے ۹۰° سے کم ہو تو جیب (ا + ب + س) چھوٹا جب ا + جب ب + جب س سے ہوگا

(۳۹) حد اقصی (جم $\frac{\pi}{ن}$)^{ن} کی جب ن لانہایت زیادہ ہو دریافت کرو

۴۰ (جم $\frac{\pi}{ن}$)$^{ن^2}$ کی حد اقصی جب ن لانہایت زیادہ ہو دریافت کرو

۴۱ ثابت کرو کہ جب ہر بڑا اس ہر — سے بڑا ہے سے ہے

گیارھوان باب

لوکارثمی اور علم مثلثی جدولون کا استعمال

(۱۵۱) اسسے پہلے دو بابون مین ہم نے اس بات کو بیان کیا ہی کہ علم مثلثی نسبتونکی جدولون کا حساب کسطرح ہوتا ہی اور لوکارثمون کی جدولین کسطرح مرتب ہوتی ہین اب ہم یہہ بیان کرینگے کہ جب یہہ جدولین حساب ہو کر مرتب ہو جائین تو اونکو کسطرح استعمال مین لاتے ہین — لوکارثمون کی جدولون کے حساب مختلف مراتب اعشاریہ تک ہوتی ہین کسی جدول

مین ۵ مرتبے اور کسی مین ۶ مرتبے اور کسی مین ۷ مرتبے اور کسی مین اور زیادہ مرتبے تک اعشاریہ کے مراتب ہوتے ہین اور جتنے زیادہ مراتب اعشاریہ کے ہوتے ہین اوتنی ہی زیادہ تقریبًا قیمتین لوکارثمون کے بیان ہوتی ہین لوکارثمی اور علم شلثی جدولین مختلف طرح سے مرتب ہوتی ہین اور اونکے ساتھ تمام باتین جو مخصوص انکے ساتھہ ہون بیان ہوتی ہین اور ترکیب اونکے استعمال کی مفصل و مشرح لکھی ہوتی ہے ہم ان جدولون کا فقط اسقدر عام طور پر بیان کرینگے کہ جسسے طالب علم کو یہہ لیاقت حاصل ہو جاے کہ جہان ان جدولون کا کام پڑے وہ اونکو دیکھہ کر کاروائی اپنی کرے زیادہ تر اونکی تفصیل اور تشریح ایسی نہین کرینگے کہ جسسے زیادہ فایدہ مند طریقہ ان جدولون کا استعمال کر سکے۔ سب جگہہ لوکارثمون مین اساس دس سمجھو

(۱۵۲) تمام تقریبی اور تخمینی حسابون مین اکثر اول ہندسہ ایسا رکھتے ہین کہ جسسے زیادہ تر اصلی قیمت کے قریب یہہ تقریبی قیمت ہو مثلاً اگر کسر اعشاریہ ۲۶ ۳۷ ۲ ء مین ہمکو تین مرتبے اعشاریہ کے رکھنے منظور ہون تو ۲۷ ۳ ء لکھین اور ۲ ۳۷ ء نہین اسواسطے کہ اول کسر بڑی اور دوسری چہوٹی ہے مگر زیادتی اول صورت مین ۰۰۰۴ ء اور کمی دوسری صورت مین ۰۰۰۶ ء ہے پس غلطی صورت اول مین بہ نسبت صورت ثانی کے کم ہے پس اسسے یہہ قاعدہ استنبط ہوتا ہے کہ جب ہمکو فقط خاص تعداد مراتب اعشاریہ کی رکھنی منظور ہو تو تعداد مطلوب سے جسقدر مراتب اعشاریہ کے ہندسے زیادہ ہون اونکو ساقط کرو اور اول ہندسہ پر اگر آخر ہندسہ عدد سقوط کا ۵ یا ۵ سے زاید ہو تو ایک زیادہ کر کے لکھو

اب ہم لوکارثم مروج کی جدولون کی ترکیب استعمال بیان کرینگے اور وہ جدولین کام مین لاینگے جنمین سات مرتبے اعشاریہ کے ہون

(۱۵۳) عدد معلوم کے لوکارثم دریافت کرو

اگر یہہ عدد جدول مین لکھا ہو تو فقط اوسکی محاذی جو لوکارثم لکھی ہوئی ہو اوسے نقل کر لو اور اوسمین عدد بیانی موافق دفعہ ۱۴۲ کے لکھو مثلاً لوکارثم ۵۳۰ ۲ کی دریافت کرنی تہی تو جدول

مین اوسکی لوکارثم ۷۲۷۵۴۱۳ لکھی ہوئی ہے اسکو اعشاریہ حصہ بناؤ اور عدد بیانی ۲ لکھدو اسیواسطے

لوک ۵۳۴ = ۲٫۷۲۷۵۴۱۳

اور ایسی ہی لوک ۵۳۴۰۰ = ۴٫۷۲۷۵۴۱۳

لوک ۰٫۰۰۵۳۴ = ۳̄٫۷۲۷۵۴۱۳

آخر مثال مین عدد بیانی -۳ ہے اوسکو ۳ پر خط کھینچکر لکھا کرتے ہین

اب فرض کرو کہ عدد معلوم جدول مین موجود نہین ہے مثلاً جدول مین ۱ سے ۱۰۰۰۰۰ تک لوکارثم لکھی ہوئی ہے اور ہمکو لوکارثم ۵۳۴۰۲٫۳۴ کی دریافت کرنی ہے پس جدول سے لوکارثم ۵۳۴۰۲٫۰۰ اور ۵۳۴۰۳٫۰۰ کی لکھین تو

لوک ۵۳۴۰۳٫۰۰ = ۴٫۷۲۷۵۶۵۷

لوک ۵۳۴۰۲٫۰۰ = ۴٫۷۲۷۵۵۷۵

تفاوت = ۰٫۰۰۰۰۰۸۲

اب ان دو لوکارثموں کے درمیان جو جدول سے لکھی ہین لوکارثم مطلوب واقع ہے اب ہم دیکھتے ہین کہ عدد مین ۱٫۰۰ کے بڑھنے سے لوکارثم مین ۰٫۰۰۰۰۰۸۲ بڑھتے ہین اور یہہ ہم فرض کر لیتے ہین کہ اسی نسبت سے لوکارثم مین افزائش ۰٫۳۴ کے بڑھنے سے ہوگی فرض کرو کہ اوس زیادتی کو جو ۵۳۴۰۲٫۰۰ کی لوکارثم پر زیادہ کرنے سے لوکارثم ۵۳۴۰۲٫۳۴ کی حاصل ہوتی ہے لا تعبیر کرتا ہے تو بموجب فرض مذکور کے

۱٫۰۰ : ۰٫۳۴ :: ۰٫۰۰۰۰۰۸۲ : لا

اسواسطے لا = $\frac{۳۴}{۱۰۰}$ × ۰٫۰۰۰۰۰۸۲ = ۰٫۰۰۰۰۰۲۸ بموجب دفعہ ۱۵۲ کے

اسیواسطے لوک ۵۳۴۰۲٫۳۴ = ۴٫۷۲۷۵۵۷۵ + ۰٫۰۰۰۰۰۲۸ = ۴٫۷۲۷۵۶۰۳

(۱۵۴) ہمنے یہہ فرض کر لیا ہے کہ لوکارثم مین افزائش متناسب عدد کے افزائش کی ہوتی ہے اسکو

اصول اجزاء متناسب کہتے ہیں اگرچہ یہہ اصول بالکل صحیح نہیں مگر اسقدر صحیح ہے کہ اوسے عملیات میں کوئی خلل حساب کے اندر نہیں پیدا ہوتا

(۱۵۵) عمل جو دفعہ بالا میں کیا گیا ہے وہ بڑی بڑی جدولوں کے ذریعہ سے اسطرح بآسانی ہوتا ہے کہ فرض کرو ہمکو لوگارتم ۲۳۴۵۳۴۸۷ کی مطلوب ہے

اجزاء	متناسب
۱	۱۸۵
۲	۳۷۰
۳	۵۵۵
۴	۷۴۰
۵	۹۲۵
۶	۱۱۱۰
۷	۱۲۹۵
۸	۱۴۸۰
۹	۱۶۶۵

لوک ۲۳۴۵۴۰۰۰ = ۷٫۳۷۰۲۱۶۹

لوک ۲۳۴۵۳۰۰۰ = ۷٫۳۷۰۱۹۸۴

تفاوت = ۰٫۰۰۰۰۱۸۵

اب بموجب عمل دفعہ ۱۵۳ کے ۰٫۰۰۰۰۱۸۵ کو $\frac{۴۸۷}{۱۰۰۰}$ میں یعنی $\frac{۴}{۱۰} + \frac{۸}{۱۰۰} + \frac{۷}{۱۰۰۰}$ میں ضرب دینی چاہیے

اب یہہ چھوٹی جدول اجزاء متناسب کی بنی ہوئی ہے فقط اوسکے اندر دیکھہ لینے سے ضرب ہو جاویگی اور یہہ جدول اوسی صفحہ پر جدول میں منطبع ہوتی ہے جیسے کہ دونو لوگارتمین نقل کرکے لکھتے ہیں اب اس چھوٹی جدول سے معلوم ہوتا ہے

کہ ۴×۰٫۰۰۰۰۱۸۵ = ۰٫۰۰۰۰۷۴۰ اور ۸×۰٫۰۰۰۰۱۸۵ = ۰٫۰۰۰۱۴۸۰ اور ۷×۰٫۰۰۰۰۱۸۵ = ۰٫۰۰۰۱۲۹۵ اور ان نتائج سے ۱۰ اور ۱۰۰ اور ۱۰۰۰ پر تقسیم کرنے سے ہمکو تین جزء مطلوب معلوم ہونگے اور عمل کی یہہ ترتیب ہوگی کہ

لوک ۲۳۴۵۳۰۰۰ = ۷٫۳۷۰۱۹۸۴

زیادہ کرو واسطے ۴ ـــ ۷۴۰

۸ ـــ ۱۴۸۰

۷ ـــ ۱۲۹۵

۷٫۳۷۰۲۰۷۴۰۹۵

اب سات مرتبے اعشاریہ کے رکھنے سے تو یہہ حاصل ہوا کہ

لوک ۲۳۴۵۳۴۸۷ = ۷٫۳۷۰۲۰۷۴

(۱۵۶) ہم نے مثال میں عدد معلوم کو صحیح مانا ہے اگر وہ کسر اعشاریہ ہو یا مخلوط کسر اعشاریہ اور صحیح سے ہو تو علامت اعشاریہ کو ساقط کرکے اوس عدد کو صحیح مانکر

لوکارثم دریافت کرو اور اسطرح عدد صحیح مانکر جو لوکارثم نکلے اوسمین مناسب عدد بیانیہ لکھدو تو لوکارثم مطلوب ہمکو حاصل ہوجائیگی مثلاً ہمکو لوکارثم ۲۳ء۴۵۳۴۸۷ کی اور ۲۳۴ء۵۳۴۸۷ کی دریافت کرنی ہی اعشاریہ حصہ لوکارثم ۳۷۰۲۰۷۴ء ہے اسواسطے

لوک ۲۳ء۴۵۳۴۸۷ = ۱ء۳۷۰۲۰۷۴

لوک ۲۳۴ء۵۳۴۸۷ = ۲ء۳۷۰۲۰۷۴

(۱۵۷) لوکارثم معلوم کے موافق عدد دریافت کرو

اگر اعشاریہ حصہ لوکارثم کا جدول مین ملجاے تو اوسکے موافق عدد لے لو اور اوس عدد مین علامت اعشاریہ موافق عدد بیانی کے عدد مین لکھدو مثلاً وہ عدد دریافت کرو کہ جسکی لوکارثم ۲̄ء۷۲۷۵۴۱۳ ہے اب اعشاریہ حصہ ۷۲۷۵۴۱۳ء کے مطابق لوکارثم ۵۳۴ جدول مین ہوتا ہے اور چونکہ عدد بیانی ۲- ہے اسلئے بموجب دفعہ ۱۴۲ کے ایک صفر آخر مین ۵۳۴ کے زیادہ کرکے علامت اعشاریہ لکھو پس اسواسطے لوکارثم معلوم کا عدد مطلوب ۰ء۰۵۳۴ ہے

اب فرض کرو کہ جدول مین لوکارثم معلوم کا حصہ اعشاریہ کسی لوکارثم کے بالکل مطابق نہین ہوتا مثلاً فرض کرو کہ لوکارثم معلوم ۴ء۳۷۰۲۰۷۴ ہے اب اسکا اعشاریہ حصہ بالکل مطابق جدول مین نہین ملتا مگر یہہ ہم دیکھتے ہین کہ عدد ۲۳۴۵۴ کے مطابق لوکارثم ۴ء۳۷۰۲۱۶۹ ہے اور عدد ۲۳۴۵۳ کے مطابق لوکارثم ۴ء۳۷۰۱۹۸۴ ہے پس

لوک ۲۳۴۵۴ = ۴ء۳۷۰۲۱۶۹

لوک ۲۳۴۵۳ = ۴ء۳۷۰۱۹۸۴

تفاوت = ۰ء۰۰۰۰۱۸۵

اور زیادتی لوکارثم معلوم کے اعشاریہ حصہ کی ۴ء۳۷۰۱۹۸۴ سے ۴ء۳۷۰۲۰۷۴ - ۴ء۳۷۰۱۹۸۴ یعنی ۰ء۰۰۰۰۰۹۰ ہے عدد مطلوب درمیان ۲۳۴۵۴ اور ۲۳۴۵۳ کے واقع ہے

فرض کرو د اوس زیادتی کو تعبیر کرتا ہے جو عدد مطلوب ۲۳۴۵۳ پر اتنا ہی تو اس بات کے فرض کرنے سے کہ ازدیاد عدد کا متناسب ازدیاد لوگارثم کے ہوتا ہے یہہ ہمکو حاصل ہوگا کہ

د : ۱ :: ٫۰۰۰۰۹۰ : ٫۰۰۰۱۸۵

اسواسطے د = ۹۰/۱۸۵ = ٫۴۸۶

اسواسطے لوگ ۲۳۴۵۳٫۴۸۶ = ۴٫۳۷۰۲۰۷۴

اور لوگ ٫۲۳۴۵۳۴۸۶ = $\bar{1}$٫۳۷۰۲۰۷۴

پس عدد مطلوب ٫۲۳۴۵۳۴۸۶ ہے

(۱۵۸) ہم ۹۰ کو ۱۸۵ پر تقسیم کرنیکے محنت سے اسطرح بچ سکتے ہیں کہ دفعہ ۱۵۵ کی جدول اجزاء متناسب کو استعمال میں لائیں اور اگر عمل قسمت کریں تو اسطرح وہ ہوگا کہ

۱۸۵) ۹۰٫۰ (٫۴۸۶
۷۴۰
۱۶۰۰
۱۴۸۰
۱۲۰۰
۱۱۱۰

اب حاصل ضرب ۷۴۰ اور ۱۴۸۰ اور ۱۱۱۰ کی جدول مرجع میں موجود ہیں اسلئے فقط تفریق کرنیکی ضرورت ہے اور مراتب عمل کی اسطرح ہونگے

۹۰
۷۴۰ ۴
۱۶۰
۱۴۸ ۸
۱۲۰
۱۱۱ ۶

(۱۵۹) اب ہم بعض مثالیں لوگارثم کے استعمال کی دیتے ہیں مثلاً حاصل ضرب ۳۶۷۰٫۲۵۷ اور ۱۳٫۶۱۱۵۸ کا دریافت کرو

لوگ ۳۶۷۰٫۲ = ۳٫۵۶۴۶۸۹۷

۶۰ ۵

۸۰ ۷

لوک ۳۶۷۰٫۲۵۷ = ۳٫۵۶۴۶۹۶۵

لوک ۱۲٫۶۱۱ = ۱٫۱۰۰۷۴۹۵

۱۷۲ ۵

۳۸ ۸

۱٫۱۰۰۷۶۹۵ = ۱۲٫۶۱۱۵۸

۳٫۵۶۴۶۹۶۵

لوکارثموں کے جمع کرنے سے = ۴٫۶۶۵۴۶۶۰

اعشاریہ حصہ لوک ۴۶۲۸۷ کا ۶۶۵۴۵۹٫ ہی

۶۰

۹۴ ۷

۳۰ ۴۶۲۸۷۷۴

پس عدد مطلوب ۴۶۲۸۷٫۷۴ ہے علامت اعشاریہ کا مقام عدد بیانی سے معلوم ہو سکتا ہے

(۱۶۰) ۱۲۳٫۴۵۶۷ کو ۵۴٫۸۷۶۴۵ پر تقسیم کرو

لوک ۱۲۳٫۴۵ = ۲٫۰۹۱۴۹۱۱

۳۱۱ ۶

۲۵ ۷

۲٫۰۹۱۵۱۴۷ = ۱۲۳٫۴۵۶۷

لوک ۵۴٫۸۷۶ = ۱٫۷۳۹۳۸۲۴

۳۲ ۴

۴ ۵

لوک ۵۴٫۸۷۶۴۵ = ۱٫۷۳۹۳۸۶۰

۲٫۰۹۱۵۱۴۷

۱٫۷۳۹۳۸۶۰

تفریق کرنے سے ۰٫۳۵۲۱۲۸۷

اعشاریہ حصہ لوک ۲۲۴۹۷ = ٫۳۵۲۱۲۴۶

۴۱ ۲

۳۸۱ ۲

۳۰ ۲۲۴۹۷۲۲

اب ہم علم مثلثی جدولون کا حال لکھتے ہین کہ کس طرح اونکو استعمال مین لاتے ہین

(۱۶۳) زاویہ معلوم کی جیب دریافت کرو

اگر زاویہ معلوم جوب کی جدول مین ملجاے تو اوسکے محاذی جو جیب لکھی ہوئی ہو اوسے نقل کرلو وہ جیب مطلوب ہوگی اور اگر نہ ملے تو زاویہ دو زاویون کے درمیان جو جدول مین ہین واقع ہوگا پس اوسکے واسطے یہہ عمل ہوگا مثلاً فرض کرو کہ ہمکو جیب ۴۴° ۳۵' ۲۵" کی دریافت کرنی ہے اب جدول سے ہمکو یہہ معلوم ہوتا ہے کہ

جیب ۴۴° ۳۶' = ء۷۰۲۱۵۳۱

جیب ۴۴° ۳۵' = ء۷۰۱۹۴۵۹

تفاوت = ۲۰۷۲

جیب مطلوب اون دو جوب کے درمیان واقع ہے جنکو جدول سے ہم نے نقل کیا ہے فرض کرو کہ جیب مطلوب جسقدر جیب ۴۴° ۳۵' سے زیادہ ہو اوس زیادتی کو لا تعبیر کرتا ہے اور یہہ مان لیا ہے کہ جیب کی زیادتی متناسب زاویہ کی زیادتی کے ہوتی ہے اسیواسطے

۶۰" : ۲۵" :: ء۰۰۰۲۰۷۲ : لا

اسیواسطے لا = $\frac{۲۵}{۶۰}$ × ء۰۰۰۲۰۷۲ = ء۰۰۰۰۸۶۳

اسیواسطے جیب ۴۴° ۳۵' ۲۵" = ء۷۰۱۹۴۵۹ + ء۰۰۰۰۸۶۳ = ء۷۰۲۰۳۲۲

اب ہم نے یہان یہہ اجزاے متناسب کو مان لیا ہے اور اوسکو ساری باب مین ماننا پڑیگا ہم اوسکی تحقیقات کافی آئندہ باب مین کرکے لکھینگے جس سے اطمینان حاصل ہوجائیگا

(۱۶۴) جیب معلوم کے مطابق زاویہ دریافت کرو

اگر جیب معلوم جوب کی جدول مین بالکل مطابق ملجاے تو زاویہ فوراً معلوم ہوجائیگا اور اگر نہ ملے تو پھر وہی عمل کرو جو اوس صورت مین کرتے کہ جیب معلوم دو جوب مندرجہ جدول کے درمیان واقع ہو مثلاً وہ زاویہ دریافت کرنا ہے جسکے جیب ء۶۹۷۰۸۸۶ ہے جدول سے ہمکو معلوم ہے

جیب ۴۸° ۱۲′ = ۶۶۹٫۷۱۶۵۱ د

جیب ۴۸° ۱۱′ = ۶۹ ۶۹۵۶۵ د

تفاوت = ۰۰۰۰۳۰۸۶ د

جیب معلوم کے زیادتی جیب ۴۸° ۱۱′ پر یہہ ہے کہ

۶۹۷۰۸۶ د – ۶۶۶۹۵۶۵ د یعنی ۰۰۰۰۱۳۲۱ د

زاویہ مطلوب اون دو زاویون کے درمیان واقع ہی جنکے جیوب جدول سے لکھی ہین فرض کرو کہ

۴۸° ۱۱′ سے جسقدر زاویہ زیادہ ہو اوسکی ثانیون کی تعداد ن ہے

۰۰۰۰۳۰۸۶ د : ۰۰۰۰۱۳۲۱ د :: ۶۰ : ن

اسواسطے ن = ۶۰ × ۰۰۰۰۱۳۲۱ د / ۰۰۰۰۳۰۸۶ د = ۶۰ × ۱۳۲۱ / ۳۰۸۶ = ۳۸

اسواسطے زاویہ مطلوب ۴۸° ۱۱′ ۳۸″ ہے

(۱۶۵) زاویہ معلوم کی جیب التمام دریافت کرو

اگر زاویہ معلوم جدول مین موجود ہو تو زاویون کے جیوب التمام کی جدول مین جدول مطلوب فوراً معلوم ہوجائیگی اب ہم وہ صورت لکھتے ہین کہ جسمین زاویہ معلوم درمیان دو زاویون کی جدول مین واقع ہو مثلاً جیب التمام ۴۸° ۳۵′ ۲۵″ کی دریافت کرنی تو جدول سے ہمکو معلوم ہے کہ

جم ۴۸° ۳۵′ = ۳۰۳۳۰۲۲۱ ۹ د

جم ۴۸° ۳۶′ = ۶۰۲۳۰۲۱۹ د

تفاوت ۰۰۰۰۳۰۴۴ د

چونکہ اول ربعہ مین جب زاویہ بڑہتا ہے جیب التمام کم ہوتی ہے تو جیب التمام مطلوب کم ہوگی ۴۸° ۳۵′ کے جیب التمام سے اور جیب التمام مطلوب اون دونو جیوب التمام کے درمیان واقع ہے جو ہمنے جدول سے نقل کی ہین

فرض کرو کہ وہ جیب التمام ۴۸° ۳۵′ سے بقدر ل کے کم ہین تو

۶۰ : ۲۵ :: ۳۰۴۳ ۰۰۰ ۰ : لد

اسیواسطے لد = $\frac{۲۵}{۶۰}$ × ۳۰۴۳ ۰۰۰ ۰ = ۸۵۱ ۰۰۰ ۰

اسیواسطے جم ۴۴° ۳۵' ۲۵'' = ۹٫۸۴۲۳۰۳ – ۸۵۱ ۰۰۰ ۰ = ۹٫۸۴۱۴۵۲

(۶۶) جس زاویہ کی جیب التمام معلوم ہو اوسکو دریافت کرو

اگر جیب التمام معلوم جدول مین ملجای تو زاویہ مطلوب فوراً معلوم ہو جائیگا اب ہم وہ صورت لکھتے ہین کہ جیب التمام معلوم دو جوب التمام کے درمیان واقع ہو مثلاً وہ زاویہ دریافت کرنا ہو جسکی جیب التمام ۹٫۸۴۹۸۴۸ ہے جدول سے ہمکو معلوم ہوتا ہے کہ

جم ۴۴° ۱۱' = ۹٫۸۵۱۱۳۴

جم ۴۴° ۱۲' = ۹٫۸۴۹۱۰۶

تفاوت = ۳۰۲۸ ۰۰۰ ۰

اب جیب التمام معلوم جیب التمام ۴۴° ۱۱' سے بقدر ۹٫۸۵۱۱۳۴ – ۹٫۸۴۹۸۴۸ کے یعنی ۱۲۸۶ ۰۰۰ ۰ کے کم ہے پس زاویہ مطلوب دو زاویون کے درمیان واقع ہے جنکو جدول سے نقل کیا ہے فرضکرو کہ ۴۴° ۱۱' سے بقدر ن ثانیون کے زاویہ مطلوب زیادہ ہے

۳۰۲۸ ۰۰۰ ۰ : ۱۲۸۶ ۰۰۰ ۰ :: ۶۰ : ن

اسیواسطے ن = ۶۰ × $\frac{۱۲۸۶ ۰۰۰ ۰}{۳۰۲۸ ۰۰۰ ۰}$ = $\frac{۱۲۸۶ × ۶۰}{۳۰۲۸}$ = ۲۸

پس زاویہ مطلوب ۴۴° ۱۱' ۲۸'' ہے

(۱۶۷) اب کچھ ضرور نہین کہ اور علم مثلثی نسبتون کی بھی مثالین دیجائین بڑی بات قابل یاد رکھنے کے یہہ ہے کہ اول ربعہ مین زاویہ کے بڑہنے سے مماس اور قاطع الزاویہ بڑہتا ہے اور مماس التمام اور قاطع التمام گھٹتا ہے پس جیب کی طرح سے مماس اور قاطع الزاویہ کا بیان ہو سکتا ہے اور جیب التمام کی طرح مماس التمام اور قاطع التمام کا حال لکھا جا سکتا ہے

(۱۶۸) علم مثلثی جملون کی جدولین جنکا ذکر ہم نے لکہا ہے اصلی یا طبعی جدولین جملونکی کہلاتی ہین اور اس اصلی یا طبعی کی قید اسلیئے لگائی جاتی ہے کہ اونکی تمیز اون جدولون سے ہوجاے جنکا ذکر ہم آگے کرتے ہین جیوب کی جدول کو جدول اصلی جیوب کی کہتے ہین اور اگر ہم لوکارثم تمام جیوب کی لیکر جدول مرتب کرین تو اوسکو لوکارثمی جدول جیوب کی کہینگے اور ایسے ہی جیوب التمام کے اور مماسون کی لوکارثمی جدول مرتب کر سکتے ہین اور علی ہذا القیاس اور علم مثلثی جملون کی اور اونکو لوکارثمی جدول جیوب التمام اور لوکارثمی جدول مماسونکی کہتے ہین غرض جس جملہ کی لوکارثمین لو اوسیکی لوکارثمی جدول کہلائیگی

(۱۶۹) بڑا فائدہ ان لوکارثمی جدولون سے حساب کرنیکے اندر یہہ ہے کہ حساب مین اختصار بہت لوکارثم کی اعانت سے ہوجاتا ہے اور اسکا حال مفصل اوسوقت کہل جائیگا کہ ہم مثلثونکا حل لکہینگے اور ہمنے یہہ بیان کردیا ہے کہ یہہ بات بہت ظاہر ہے کہ علم مثلثی جملون کے جیبون کی جدول کے لوکارثم لیلینے سے لوکارثمی جدول مرتب ہوجائیگی اور اس مضمونکا حال اعلیٰ درجہ کا لکہینگے اوسمین یہہ بھی بیان کرینگے کہ ان لوکارثمی جدولون کو کام لائینگے اور اونکا کچھہ تعلق اصلی جملون کی جدولون سے نہین ہوگا اب لوکارثمی جدولونکا حال لکہتے ہین

(۱۷۰) چونکہ کسی زاویہ کی جیب ایک سے بڑی ہرگز نہین ہوتی تو جیب کی لوکارثم کبہی مثبت نہین ہوگی اور یہی کیفیت جیب التمام کی ہے اور جو زاویہ ۴۵° سے کم ہوگا اوسکی مماس کی لوکارثم بہی منفی ہوگی اور جو زاویہ ۴۵° سے بڑا ہوگا اوسکا مماس التمام منفی ہوگا اب اس منفی مقادیر سے بچنے کے لئے جدولون مین ہر علم مثلثی جملہ ۱۰ زیادہ کردیتے ہین اور پہر اونکو جدولین مندرج کرتے ہین اور جو لوکارثم اسطرح زیادہ کرنے سے حاصل ہوتی ہے اوسکو لوکارثم جدولی کہتے ہین اور اوسکو حرف ل سے تعبیر کرتے ہین پس ل جیب ا سے مراد لوکارثم جدولی جیب ا کی ہے اور وہ برابر اصلی لوکارثم جیب ا اور دس کے

ہوتی ہے حسابون میں ضرور اس دس کے بڑہانیکا خیال رکہنا چاہیے اور اسی کام مثلثون کے حل کرنیمین پڑیگا اب آگے ہم لوکارثمی جملون کی جدولون کا استعمال کرینگے

(۱۷۱) زاویہ معلوم کی جیب کی لوکارثم جدولی دریافت کرو

اگر زاویہ معلوم جدول لوکارثم جیب مین ملجاے تو نتیجہ مطلوب ہمکو فوراً معلوم ہوجائیگا

اب ہم اوس صورت کو بیان کرتے ہین کہ جسمین زاویہ دو زاویون کے درمیان جدول مین واقع ہو مثلاً لوکارثم جدولی جیب ۴۴° ۳۵′ ۲۵٫۷″ کی دریافت کرنی ہو جدول سے ہمکو معلوم ہے کہ

ل جب ۴۴° ۳۵′ ۳۰″ = ۹٫۸۴۶۳۶۷۸

ل جب ۴۴° ۳۵′ ۲۰″ = ۹٫۸۴۶۳۴۶۴

تفاوت = ۰٫۰۰۰۰۲۱۴

پس لوکارثم جدولی جیب کے اون دو کے درمیان واقع ہین جو اوپر جدول مین سے دیکہہ کر لکہتے ہین فرض کرو کہ لوکارثم جدولی جیب ۴۴° ۳۵′ ۲۰″ سے جسقدر وہ زیادہ ہی اوس زیادتی کو لد تعبیر کرتا ہے تو موافق اصول اجزاء متناسب کے

۱۰ : ۵٫۷ :: ۰٫۰۰۰۰۲۱۴ : لد

پس لد = $\frac{۵٫۷}{۱۰}$ × ۰٫۰۰۰۰۲۱۴ = ۰٫۰۰۰۰۱۲۲

اسواسطے ل جب ۴۴° ۳۵′ ۲۵٫۷″ = ۹٫۸۴۶۳۴۶۴ + ۰٫۰۰۰۰۱۲۲ = ۹٫۸۴۶۳۵۸۶

(۱۷۲) لوکارثم جدولی جیب کی معلوم ہے اوسکے مطابق زاویہ دریافت کرو

اگر لوکارثم جدولی معلوم جیب کی جدول مین ملجاے تو زاویہ مطلوب فوراً معلوم ہوجائیگا

اب ہم وہ صورت لکہتے ہین جسمین لوکارثم جدولی معلوم جدول کے اندر دو لوکارثم جدولی کے اندر واقع ہو مثلاً وہ زاویہ دریافت کرنا ہو جسکی لوکارثم جدولی جیب کی ۹٫۵۴۳۳۸۹۴ ہو اور جدول سے ہمکو معلوم ہے

ل جب ۴۴° ۱۱' ۴۰" = ۹٫۸۴۳۴۹۲۳

ل جب ۴۴° ۱۱' ۳۰" = ۹٫۸۴۳۴۷۰۷

تفاوت = ۰٫۰۰۰۰۲۱۶

لوکارثم جدولی جیب معلوم کی زیادتی ۴۴° ۱۱' ۳۰" کے لوکارثم جدولی جیب سے بقدر ۹٫۸۴۳۴۸۹۴ − ۹٫۸۴۳۴۷۰۷ یعنی ۰٫۰۰۰۰۱۸۷ کے ہے

زاویہ مطلوب درمیان اول دو زاویوں کے واقع ہے جنکو جدول مین سے لکھا ہے فرض کرو کہ جسقدر زاویہ ۴۴° ۱۱' ۳۰" سے زیادہ ہو اون ثانیوں کی تعداد کو ن تعبیر کرتا ہے تو

۰٫۰۰۰۰۲۱۶ : ۰٫۰۰۰۰۱۸۷ :: ۱۰ : ن

اسواسطے ن = ۱۰ × ۰٫۰۰۰۰۱۸۷ / ۰٫۰۰۰۰۲۱۶ = ۱۸۷ × ۱۰ / ۲۱۶ = ۸٫۷

اسواسطے زاویہ مطلوب ۴۴° ۱۱' ۳۸٫۷" کے ہے

(۱۷۳) زاویہ معلوم کی لوکارثم جدولی جیب التمام کی دریافت کرو

اگر زاویہ لوکارثم جدولی جیوب التمام مین ملجای تو نتیجہ مطلوب فوراً حاصل ہوجایگا اب ہم اس دو صورت کو لکھتے ہین کہ جسمین زاویہ معلوم اون دو زاویوں کے درمیان واقع ہو جو جدول مین شامل ہے ہین مثلاً ۴۴° ۳۵' ۲۵٫۷" کے لوکارثم جدولی جیب التمام کی دریافت کرنی ہو تو ہمکو جدول سے معلوم ہوتا ہے کہ

ل جم ۴۴° ۳۵' ۲۰" = ۹٫۸۵۲۵۷۸۹

ل جم ۴۴° ۳۵' ۳۰" = ۹٫۸۵۲۵۵۸۲

تفاوت = ۰٫۰۰۰۰۲۰۷

اب جدول سے جو دو لوکارثمین لکھی ہین اونکے درمیان مطلوب لوکارثم جدولی جیب التمام کے واقع ہے اور ۴۴° ۳۵' ۲۰" کے لوکارثم جدولی جیب التمام سے چھوٹی ہے فرض کرو اس کمی کو لا تعبیر کرتا ہے تو

۱۰ : ۵٫۷ :: ۰٫۰۰۰۰۲۰۷ : لا

پس لا = ۵٫۷ / ۱۰ × ۰٫۰۰۰۰۲۰۷ = ۰٫۰۰۰۰۱۱۸

اسواسطے ل جم ۴۴° ۳۵' ۲۵٫۷" = ۹٫۸۵۲۵۷۸۹ − ۰٫۰۰۰۰۱۱۸ = ۹٫۸۵۲۵۶۷۱

(۱۷۴) لوکارثم جدولی جیب التمام کی معلوم ہے اوسکے مطابق زاویہ دریافت کرو

اگر جدول مین لوکارثم جدولی جیب التمام ملجاے تو فہو المراد فوراً مطلب حاصل ہو جایگا اور نہین پہر وہ عمل کرو جو اوس صورت مین کرتے کہ لوکارثم جدولی جیب التمام معلوم جدول دو لوکارثمون کے درمیان واقع ہو مثلاً وہ زاویہ دریافت کرنا مطلوب ہے جسکی لوکارثم جدولی جیب التمام کی ۹٫۸۵۵۱۸۶ ہے جدول سے معلوم ہوتا ہے کہ

ل جم ۴۴° ۱۱′ ۳۰″ = ۹٫۸۵۵۳۶۴

ل جم ۴۴° ۱۱′ ۴۰″ = ۹٫۸۵۵۰۶۰

تفاوت = ۰٫۰۰۰۳۰۴

تو لوکارثم جدولی جیب التمام معلوم ۴۴° ۱۱′ ۳۰″ کی لوکارثم جدولی جیب التمام سے بقدر ۹٫۸۵۵۵۸۶ - ۹٫۸۵۵۳۶۴ یعنی ۰٫۰۰۰۱۷۸ کے کم ہے

زاویہ مطلوب ضرور اون دو زاویونکے درمیان واقع ہے جو جدول سے نقل کئے ہین فرض کرو کہ زاویہ مطلوب کو جو زیادتی ۴۴° ۱۱′ ۳۰″ پر حاصل ہے اوسکی ثانیون مین تعداد ن ہے تو

۰٫۰۰۰۳۰۴ : ۰٫۰۰۰۱۷۸ :: ۱۰ : ن

اسواسطے ن = ۱۰ × $\frac{۰٫۰۰۰۱۷۸}{۰٫۰۰۰۳۰۴}$ = $\frac{۱۷۸۰}{۳۰۴}$ = ۵٫۸۷

اسواسطے زاویہ مطلوب ۴۴° ۱۱′ ۳۵٫۸۷″ ہے

(۱۷۵) کچھ ضرور نہین معلوم ہوتا کہ اور علم مثلثی جملون کی بہی مثالین لکھی جائین ایک بڑی بات یہہ ہے اوسکو یاد رکھنا چاہیے کہ اول ربعہ مین زاویہ جسقدر بڑہے کا لوکارثم جدولی مماس کی اور قاطع الزاویہ کی بڑہیگی اور لوکارثم جدولی مماس التمام اور قاطع التمام کی گہٹیگی اسلیے مماس اور قاطع الزاویہ کا بیان مثل جیب کے اور مماس التمام اور قاطع التمام کا بیان مثل جیب التمام کے ہو سکتا ہے

مثالین

(۱) معلوم ہے کہ لوک ۱۲۴۴۰ = ۴٫۰۹۴۸۳۰۴

لوک ۱۲۴۴۱ = ۴٫۰۹۴۸۵۵۳

لوک ۱۲۴۴۰٫۳۵ دریافت کرو

(۲) معلوم ہے کہ لوک ۱٫۰۶۸۹ = ٫۰۲۶۸۱۵۲

لوک ۱٫۰۶۸۷ = ٫۰۲۸۸۵۵۸

تو وہ عدد دریافت کرو جسکی لوکارثم ٫۰۲۸۸۳۵۵ ہو

(۳) اور ایک جدول اجزائے متناسب کی اعداد درمیانی کے واسطے بناؤ اور لوک ٫۲۳۴۵۶۳۸ کی دریافت کرو

لوک ٫۲۳۴۵۶ = ۲٫۳۷۰۲۵۴۰

لوک ٫۲۳۴۵۷ = ۲٫۳۷۰۲۷۲۵

(۴) وہ عدد دریافت کرو جسکی لوکارثم — (۱٫۸۷۵۳۱۴۵) ہو اور یہہ معلوم ہے کہ

لوک ۱٫۳۳۲۵ = ٫۱۲۴۶۶۷۲ لوک ۱٫۳۳۲۶ = ٫۱۲۴۶۹۶۸

(۵) معلوم ہے کہ لوک ۳٫۸۵۵ = ٫۵۸۶۰۲۴۴

لوک ۳٫۸۵۵۱ = ٫۵۸۶۰۳۵۶

لوک $(٫۰۰۳۸۵۵۰۴)^{\frac{1}{4}}$ کی دریافت کرو

(۶) معلوم ہے کہ لوک ۲۴ = ۱٫۳۸۰۲۱۱۲

لوک ۴٫۸۹۸۹ = ٫۶۹۰۰۹۸۶

لوک ۴٫۸۹۹۰ = ٫۶۹۰۱۰۷۴

$(۲۴)^{\frac{1}{2}}$ کو چھہ مرتبہ کی اعشاریہ تک دریافت کرو

(۷) معلوم ہے کہ لوک ۱۴۲۷۱ = ۴٫۱۵۴۴۵۴۴

لوک ۲۰۳۱۳ = ۴٫۳۰۷۷۷۸۱

لوک ۲۰۳۱۴ = ۴٫۳۰۷۷۹۵۴

$(۱۴۲٫۷۱)^{\frac{1}{7}}$ کو دریافت کرو

(۸) معلوم ہے لوک ۷ = ۰٫۸۴۵۰۹۸۰

لوک ۵۸۷۵۱ = ۴٫۷۶۹۰۱۵۳

لوک ۵۸۷۵۲ = ۴٫۷۶۹۰۲۲۶

(۱۷) معلوم ہے جب ۴۷° = ٫۷۳۱۳۵۳۷

جب ۴۸° = ٫۷۴۳۱۴۴۸

جب ۴۷° ۱' دریافت کرو

(۱۸) معلوم ہے کہ جب ۷° ۱۷' = ٫۱۲۶۷۷۶۱

جب ۷° ۱۸' = ٫۱۲۷۰۶۴۶

جب ۷° ۱۷' ۲۵" کو دریافت کرو

(۱۹) معلوم ہے کہ ل جب ۱۷° ۱' = ۹٫۴۶۶۳۴۸۳

ل جب ۱۷° = ۹٫۴۶۵۹۳۵۳

ل جب ۱۷° ۰' ۱۲" کو دریافت کرو

(۲۰) معلوم ہے کہ ل جب ۲۶° ۲۴' = ۹٫۶۴۸۰۰۳۸

ل جب ۲۶° ۲۵' = ۹٫۶۴۸۲۵۸۲

ل جب ۲۶° ۲۴' ۱۲" کو دریافت کرو

(۲۱) معلوم ہے کہ ل مم ۲۷° ۱۵' = ۹٫۵۰۰۵۱۹۱

ل مم ۲۷° ۱۶' = ۹٫۵۰۰۴۸۵۳۸

ل مم ۲۷° ۱۵' ۳۵" کو دریافت کرو

(۲۲) معلوم ہے کہ ل مم ۱۸° ۴۶' = ۹٫۱۶۰۴۵۶۹۱ تفاوت ۱۰" کے واسطے = ٫۰۰۰۴۱۶۸ تو وہ زاویہ دریافت کرو کہ ل مم جسکا ۹٫۱۶۰۳۴۹۳ ہو

(۲۳) معلوم ہے کہ ل جم ۲۰° ۳۵' ۳۰" = ۹٫۹۷۱۳۳۵۱ اور تفاوت ۱۰" کے واسطے = ٫۰۰۰۰۷۹ وہ زاویہ دریافت کرو جسکا ل جم ۹٫۹۷۱۳۳۸۳ ہو

(۲۴) معلوم ہے کہ ل جم ۴۳° ۴۴' = ۹٫۹۱۴۵۱۳۷ تفاوت ۱' کے واسطے = ٫۰۰۰۰۵۶۸ ل جم ۴۳° ۴۴' ۲۶" کو دریافت کرو اور نیز وہ زاویہ بھی دریافت کرو کہ ل جم جسکا ۹٫۹۱۴۵۶۴۶ ہو

(۲۵) معلوم ہے کہ ل جب ۳۷° ۱۹' = ۹٫۷۸۲۶۳۰۱ تفاوت ۱' کے واسطے = ٫۰۰۰۱۶۵۷

ل جب ۷۳° ۱۹' = ۹٫۹۰۰۵۲۹۴ تفاوت ا' کے واسطے = ۰٫۰۰۰۰۹۶۳

ل قط ۷۳° ۱۹' ۴۷'' اور ل جم ۷۳° ۱۹' ۴۷'' کو دریافت کرو

(۳۶) معلوم ہے کہ ل جب ۳۳° ۱۸' = ۹٫۷۳۶۸۲۷۷ تفاوت ا' کے واسطے = ۰٫۰۰۰۱۹۹۸

ل جم ۳۳° ۱۸' = ۹٫۹۲۶۹۹۱۳ تفاوت ا' کے واسطے = ۰٫۰۰۰۰۷۹۹

ل جب اور ل جیب التمام اور ل مماس ۳۳° ۱۸' ۶٫۲۴'' کو دریافت کرو

باب دوازدہم

مسئلہ اجزاء متناسب کا

(۱۷۶) اجزاء متناسب کے اصول کو پہلے ساری باب میں صحیح مانکر نتائج کو بیان کیا ہے اب ہم اوکی تحقیقات کرتے ہیں اس باب میں ساری لوکارثمین بموافق اساس ۱۰ کے مانے گئے ہیں اور ایک جدول لوکارثم کی بنی ہوئی ہے جسمین ایک سے لیکر لاکھ تک صحیح اعداد کی لوکارثم لکھی ہوئی ہے اور اوسمین لوکارثمونکا حساب سات مرتبہ کے اعشاریہ تک ہوا ہے

(۱۷۷) ثابت کرو کہ عدد میں جس نسبت سے جو تبدیل کیا جاوے اوسی نسبت سے تبدیل لوکارثم میں تقریباً ہو جاتا ہے

ہمکو معلوم ہے کہ لوک (ن + د) - لوک ن = لوک $\frac{ن + د}{ن}$ = لوک $(۱ + \frac{د}{ن})$

اور بموجب دفعہ ۱۴۸ کے لوک $(۱ + \frac{د}{ن})$ = لب $(\frac{د}{ن} - \frac{د^۲}{۲ن^۲} + \frac{د^۳}{۳ن^۳} - \ldots)$

اسمین لب قالب لوکارثمی ہے اور لب = ۰٫۴۳۴۲۹۴۴۸

اب فرض کرو کہ ن صحیح عدد پانچ مرتبہ کا ہے تو ن کم ۱۰۰۰۰ سے نہ ہوگا

اور ن کو فرض کرو کہ وہ ایک سے بڑی نہیں ہے تو $\frac{لب\, د^۲}{۲ن^۲}$ چھوٹا بہ نسبت $\frac{لب}{۲}(\frac{۱}{۱۰۰۰۰})^۲$ کے ہوگا اور بدرجہ اولے چھوٹا ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۳ سے ہوگا

اور اسکے دس ہزارویں حصہ سے $\frac{لب\, د^۳}{۳ن^۳}$ چھوٹا ہوگا اور علی ہذا القیاس

اسسے معلوم ہوا کہ سات مرتبہ کے اعشاریہ تک ہمکو یہہ حاصل ہے کہ

لوک (ن + د) – لوک ن = لب د / ن

اب اس مساوات سے نتیجہ مطلوب ثابت ہے اسواسطے کہ اگر عدد ن سے ن + د بدل جا تو اوسکے موافق تبدل لوکارثم مین تقریباً لب د / ن واقع ہوگا یعنی تبدل لوکارثم مین تقریباً متناسب تبدل عدد کے واقع ہوتا ہے

(۱۷۸) اصول اجزاء متناسب کا اعداد کی لوکارثمون مین اس وجہ سے ایک خاص درجہ تک عملاً صحیح مانا گیا ہے جب ہم کو لوکارثم کسی عدد معلوم کی دریافت کرنی ہو تو ہم علامت اعشاریہ کو عدد مین آخر سے پانچ ہندسون کے بعد لکھ سکتے ہین تو عدد ایسے دو عددون کے درمیان ہو جائیگا کہ جنمین فرق ایک کا ہے اور وہ دونو جدول مین موجود ہین اور یہہ ہمنے ثابت کر دیا ہے کہ ساتھ مرتبہ کے اعشاریہ مین تو تبدل عدد کا متناسب لوکارثم کے تبدل کے ہوتا ہے پس اگر ضرورت ہو تو علامت اعشاریہ کے مقام مین تبدل کرین اور اوسکے مطابق عدد بیانی لوکارثم کا بنائین تو اسطرح ہمکو اصلی عدد معلوم کی لوکارثم معلوم ہو جائیگی اور اسیطرح اگر ہم چاہین تو لوکارثم معلوم کو جدولون مین درمیان دو لوکارثمونکی دیکھہ سکتے ہین

(۱۷۹) اب ہم بتلائینگے کہ دفعہ ۱۷۷ کے نتیجہ کو عملاً کس طرح استعمال مین لاتے ہین ہمکو معلوم ہے کہ

لوگ (ن + د) – لوگ ن = لب د / ن

اور نیز لوگ (ن + ۱) – لوک ن = لب / ن = جر کے فرض کرو

اب جر دو معلوم لوکارثمون کا تفاوت ہے اسلئے وہ جدول سے باآسانی دریافت ہو جاتا ہے اور (ن + د) کی لوکارثم دریافت کرنیکے لئے اس مقدار معلوم جر کو کسر معلوم د مین ضرب دو اور حاصلضرب کو لوکارثم ن پر زیادہ کرو اور اسی قاعدہ سے دفعہ ۱۵۳ مین عدد معلوم کی لوکارثم دریافت ہوگی

اب فرض کرو کہ ہمکو لوکارثم معلوم کا عدد دریافت کرنا ہے فرض کرو کہ ن اور ن + ۱ ایسے اعداد ہین کہ اونکے درمیان عدد مطلوب واقع ہے اور عدد مطلوب کو ن + د

تعبیر کرو تو لوک (ن + د) - لوک ن معلوم ہے اوسکو لا سے تعبیر کرو اور مقدار معلوم
لوک (ن + ۱) - لوک ن کو فر سے تعبیر کرو تو د فر = لد اسواسطے د = لد/فر یہی قاعدہ
تہا جسکے موافق عمل دفعہ ۱۷۵ مین ہوا تہا

(۱۸۰) اب ہم یہہ بتلائینگے کہ اصلی علم مثلثی جملون کے صورت مین کہانتک اجزاء متناسب کا قاعدہ
حاوی ہے اسکا حال ہریک جملہ کو جدا جدا لیکر لکہینگے اس تمام باب مین اس بات کو فرض
کرلیا ہے کہ زاویئے قائمی سے بڑے نہین ہین اور سب مثبت ہین اور یہی ہمارا لکہنا کافی ہوگا
اسواسطے کہ دفعہ ۵۵ مین ہم ثابت کرائی ہین کہ ہریک زاویہ کا ہریک علم مثلثی جملہ برابر ہوتا ہے
بعض مثبت زاویہ کے اوسی علم مثلثی جملے کے یعنی جیب برابر جیب کے اور جم برابر جم علیٰ ہذا القیاس
اور یہہ مثبت زاویہ قائمہ سے بڑا نہین ہوتا

(۱۸۱) بالعموم یہہ ثابت کرو کہ ایک زاویہ کی جیب مین جو تبدل ہو تقریباً متناسب زاویہ کے
تبدل کے ہوتا ہے

ہمکو معلوم ہے کہ جب (بر + ھہ) - جب بر = جب ھہ جم بر - جب بر (۱ - جم ھہ)

= جب ھہ جم بر (۱ - مس بر $\frac{۱ - جم ھہ}{جب ھہ}$)

= جب ھہ جم بر (۱ - مس بر مس $\frac{ھہ}{۲}$)

اب فرض کرو کہ ھہ مقیاس قوسی ایسے چہوٹے زاویہ کا ہے کہ جب ھہ = ھہ کے تقریباً
پس تقریباً جب (بر + ھہ) - جب بر = ھہ جم بر (۱ - مس بر مس $\frac{ھہ}{۲}$)

اب فرض کرو کہ بر ایسا قریب $\frac{\pi}{۲}$ کے نہین ہے کہ مس بر بہت بڑا ہو اسلئے
مس بر مس $\frac{ھہ}{۲}$ کو ایسی ایک مقدار خفیف خیال کرسکتے ہین کہ اوسکو حساب مین
نہ لگائین اور اوسے محو کردین تو ہمکو تقریباً یہہ حاصل ہوگا کہ

جب (بر + ھہ) - جب بر = ھہ جم بر

اور اسی سے ہمارا دعوی ثابت ہے

اور ایسے ہی جب (بر − ھہ) − جب بر = − ھہ جم بر کے تقریباً

(۱۸۲) اب ہم یہہ دریافت کرنا چاہتے ہین کہ دفعہ گذشتہ کے قاعدہ کو اگر استعمال مین لائین تو غلطی کسقدر ہوگی اب ہم اس غلطی کی مقدار کو جانچتے ہین قیمت تقریبی

جب (بر + ھہ) − جب بر کی ھہ جم بر اور قطعی قیمت اوسکی

جب ھہ جم بر − (۱ − جم ھہ) جب بر ہے تقریبی قیمت کے دریافت کرنیکے لئے ہم قطعی قیمت کے اول رقم مین جب ھہ کو ھہ سے بدل دیتے ہین اور قطعی قیمت کی دوسری رقم کو محو کردیتے ہین اور محسوب نہین کرتے پس اول یہہ خیال کرو کہ جب ھہ کے جگہہ ھہ کے لکھنے سے کیا فرق پڑتا ہے مقیاس قوسی ایک درجہ کے زاویہ کا $\frac{\pi}{180}$ ہے اور بموجب دفعہ ۱۳۰ کے جب ھہ کا فرق ھہ سے زیادہ بہ نسبت $\frac{ھہ^3}{4}$ کے نہین ہوسکتا پس اسنے ثابت ہوا کہ ایک درجہ کے زاویہ کے جب کا فرق مقیاس قوسی سے زیادہ ۱ . . . . . . ء سے نہین ہوسکتا اسسے معلوم ہوا کہ اگر حساب کو سات مرتبہ کی اعشاریہ تک وسعت دین تو کوئی غلطی ایک درجہ کے زاویہ مین جب ھہ کو ھہ سے بدل دینے مین نہین واقع ہوتی اسلئے بدرجہ اولی اوس حالت مین تو غلطی واقع ہی نہین ہوگی کہ ھہ کے ساتھہ ایک دقیقہ کے مقیاس قوسی سے بڑی نہونیکی قید لگائی جائے اب اس دوسری بات پر بحث کرتے ہین کہ جب بر (۱ − جم ھہ) یعنی ۲ جب بر جب $\frac{ھہ^2}{2}$ کی رقم کو جو محسوب نہین کرتے اوسکے سبب سے کسقدر غلطی واقع ہوتی ہے چونکہ جب بر ہرگز بڑی واحد سے نہین ہوتی اور جب $\frac{ھہ}{2}$ چھوٹی بہ نسبت $\frac{ھہ}{2}$ کے ہے اسواسطے رقم غیر محسوب چھوٹی بہ نسبت $\frac{ھہ^2}{2}$ کے ہے اور اگر ھہ مقیاس قوس ایک دقیقہ کے زاویہ کا ہو تو $\frac{ھہ^2}{2}$ چھوٹا بہ نسبت ۱ . . . . ء کے ہوگا پس اگر حساب سات مرتبہ کی اعشاریہ تک کیا جائے تو رقم جب بر (۱ − جم ھہ) کو غیر محسوب بنانے سے کچھہ غلطی نہین واقع ہوگی بشرطیکہ ھہ کے ساتھہ قید ایک دقیقہ کی مقیاس قوسی سے بڑی نہونیکی لگائی جائے

اسیواسطے اگر ہم اصلی جوب کی جدول ایسی رکہتی ہین کہ اوسمین ہر ایک دقیقہ کا حسابات مرتبہ کی اعشاریہ تک کیا گیا ہو تو اوس حساب مین کچہہ غلطی نہین واقع ہوگی جو ساتوین مرتبہ کے اعشاریہ تک اوس جیب زاویہ کا کیا جاے جو جدول مین دو کے درمیان واقع ہوا یہہ حساب بہی حساب موافق اس صورت قانونی کے کیا جاے کہ

جیب (بر + ھ) − جیب بر = ھ جم بر

(۱۶۳) اب ہم بتلاوینگے کہ یہہ نتیجہ عمل مین کس طرح کام آتا ہی فرض کرو کہ اصلی جوب کی جدول ہمارے پاس ہے اور اوسمین ہر دقیقہ کے جیب لکہی ہوئی ہے اور ہمکو جیب ایک ایسی زاویہ کے دریافت کرنی ہی جو جدول کے دو جیبونکی درمیان واقع ہو پس فرض کرو کہ ک مقیاس قوسی ایک دقیقہ کے زاویہ کا ہی اور بر اور بر + ک مقیاس قوسی جدول کے اون زاویون کے مقیاس قوسی ہین جنکے درمیان زاویہ معلوم واقع ہی اور بر + ھ مقیاس قوسی زاویہ معلوم کا ہے

جیب (بر + ک) − جیب بر = ک جم بر = فر کے فرض کرو

جیب (بر + ھ) − جیب بر = ھ جم بر = (ھ/ک) فر

پس جیب (بر + ھ) = جیب بر + (ھ/ک) فر = جیب بر + (ث/۶۰) فر

اسمین ث تعداد ثانیون کی اوس زاویہ کی ہے جسکا مقیاس قوسی ھ ہے

اب جدول کے دو متصل کے زاویون کا تفاوت فر ہے اور اسیواسطے جدول مین جلدی سے مل سکتا ہی پس اس مقدار معلوم کو ث/۶۰ مین ضرب دین اور حاصل کو جیب بر پر زیادہ کرین تاکہ جیب (بر + ھ) حاصل ہو اور یہی قاعدہ دفعہ ۱۶۳ کے اندر کام مین آیا تہا

اب ہمکو زاویہ مطابق کسی اصلی جیب معلوم کے دریافت کرنا ہی

تو فرض کرو کہ ک مقیاس قوسی ایک دقیقہ کے زاویہ کا ہی اور بر اور بر + ک مقیاس قوسی زاویون کے ہین جنکے درمیان زاویہ معلوم واقع ہونا چاہئے اور بر + ھ مقیاس قوسی زاویہ مطلوب کا ہے تو جیب (بر + ھ) − جیب بر معلوم ہوگا اوسکو لا سے اور مقدار معلوم

جب (بر + ل) − جب بر کو ف سے تعبیر کرو تو ف/ل = لا اسیو ۱/ سطے ن ف = لا/ف اور فرض کرو کہ زاویہ بر جسکا مقیاس قوسی ھ ہی تعداد ثانیون کی ث ہی تو ث/ف = لا/ف اسیو ۱/ سطے

ث = ف/لا یہی قاعدہ دفعہ ۱۶۴ مین بیان ہوا ہے

(۱۸۴) جب بر قریب قریب ط/۲ کے ہو تو جم بر کے نہایت چھوٹا ہونے کے سبب سے رقم ھ جم بر بہت چھوٹی ہوگی بشرطیکہ ھ مقیاس قوسی چھوٹے زاویہ کا ہو پس دو زاویے جنمین سے ہر ایک قریب قریب ایک قائمہ کے ہو اونکی جیبون مین تفاوت نہایت کم ہوتے ہین اور اس مطلب کو ادا اسطرح کیا کرتے ہین کہ جب دو متصل کے زاویون مین سے ہر ایک تقریباً برابر قائمہ کے ہو تو اونکی اصلی جیبون کا تفاوت قابل لحاظ کے نہین ہوتا اس صورت مین ایک اور بات بھی قابل لکھنے کے ہے

جب (بر + ھ) − جب بر = جب ھ جم بر − (۱ − جم ھ) جب بر

کمیت کے اعتبار سے دوسری رقم کی نسبت اول سے

جب بر (۱ − جم ھ) / جم بر جب ھ

یعنی مس بر مس ھ/۲ ہی اور جسوقت بر تقریباً برابر ط/۲ کے ہو تو یہہ نسبت قابل لحاظ کی ہوگی بشرطیکہ ھ/۲ بدرجہ غایت چھوٹا نہ ہو پس دوسری رقم کو اول رقم کے ساتھہ مقابلہ کرنے سے ساقط نہین کرنا چاہیے اور اس بات کو اس طرح بیان کیا کرتے ہین کہ جب زوایا متصلہ مین سے ہر ایک مساوات تقریبی قائمہ کے ساتھہ رکھتا ہی تو اونکی تفاوت بقاعدہ ہوتے ہین اب دو باتین بیان ہوئین ایک تفاوتون کا قابل لحاظ کے نہوتا دوسرے بات تفاوتون کا بیقاعدہ ہونا پہلی بات کے مقابلہ مین دوسری بات کی کچھہ اصل نہین ہے

(۱۸۵) ہم نے ثابت کیا ہے کہ تقریباً

جب (بر + ھ) − جب بر = ھ جم بر

بر کو ط/۲ − بر سے بدل لو تو

جب (ط/۲ − بر + ھ) − جب (ط/۲ − بر) = ھ جم (ط/۲ − بر)

یعنی جم (بر – ھ) – جم بر = ھ جم بر

علامت ھ کے بدلنے سے

جم (بر + ھ) – جم بر = – ھ جم بر

اسمین آسانی ہے کہ اس صورت کو ہمنے اوس صورت سے مستنبط کیا ہی جسکو ابہی ثابت کیا ہی کیونکہ اس حالت مین بغیر کسی نئی تحقیقات کے مقدار غلطی کی معلوم ہو سکتی ہے لیکن یہہ مدعا ہمارا ایک اور طرح سے بہی ثابت ہو سکتا ہی اور اوسکا کچہہ واسطہ پہلی صورت قانونی سے نہین ہوگا اب ہم اوسکو لکہتے ہین

(۱۸۶) بالعموم یہہ ثابت کرو کہ ایک زاویہ کی جیب التمام مین جو تغیر ہوتا ہی وہ تقریباً متناسب زاویہ کے تبدل کے ہوتا ہے ہمکو معلوم ہے کہ

جم (بر – ھ) – جم بر = جب ھ جم بر – جم بر (ا – جم ھ)

= جب ھ جم بر (ا – جم بر (ا – جم ھ)/(جب ھ))

= جب ھ جب بر (ا – مم بر س ھ/۲)

اب فرض کرو کہ ھ بقیاس قوسی ایسی ایک چہوٹے زاویہ کا ہی کہ جب ھ = ھ کے تقریباً ہے پس

جم (بر – ھ) – جم بر = ھ جب بر (ا – مم بر س ھ/۲)

اب فرض کرو کہ بر ایسا چہوٹا نہین ہے کہ مم بر بہت بڑا ہو اسلئے مم بر س ھ/۲ کو ساقط کر دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جم (بر – ھ) – جم بر = ھ جب بر تقریباً حاصل ہوگا

اور ھ کے علامت بدلنے سے

جم (بر + ھ) – جم بر = – ھ جب بر

اور اسے دعوی ہمارا ثابت ہی

(۱۸۷) دفعہ گذشتہ کے نتیجہ سے ہم دفعات ۱۶۵ و ۱۶۶ کے قاعدونکو استخراج کر سکتے ہین اس استخراج کرنیکی ترکیب وہی ہے کہ دفعہ ۱۸۳ مین مذکور ہوئی فقط یہہ بات ہمیشہ خیال کرنا

کہ زاویہ کے بڑھنے سے جیب التمام گھٹتی ہے دفعہ ۱۸۴ کی طرح عمل کرنے سے زاویہ ہار متصلہ کے جیب التماموں کا تفاوت قابل لحاظ کے نہیں ہوتا اور جب زاویے چھوٹے ہوں تو وہ بقاعدہ ہوتا ہے

(۱۸۸) بالعموم یہہ ثابت کرو کہ ایک زاویہ کے مماس میں جو تغیر ہوتا ہے وہ تقریباً متناسب زاویہ کے تبدیل کے ہوتا ہے

ہمکو معلوم ہے کہ

$$\text{مس}(\text{بر}+\text{ھ}) - \text{مس بر} = \frac{\text{حب}(\text{بر}+\text{ھ})}{\text{حم}(\text{بر}+\text{ھ})} - \frac{\text{حب بر}}{\text{حم بر}}$$

$$= \frac{\text{حب}(\text{بر}+\text{ھ})\,\text{حم بر} - \text{حم}(\text{بر}+\text{ھ})\,\text{حب بر}}{\text{حم}(\text{بر}+\text{ھ})\,\text{حم بر}} = \frac{\text{حب}(\text{بر}+\text{ھ}-\text{بر})}{\text{حم}(\text{بر}+\text{ھ})\,\text{حم بر}} = \frac{\text{حب ھ}}{\text{حم}(\text{بر}+\text{ھ})\,\text{حم بر}}$$

$$= \frac{\text{حب ھ}}{\text{حم}^2\text{بر}\,(\text{حم ھ} - \text{حب ھ مس بر})} = \frac{\text{مس ھ}}{\text{حم}^2\text{بر}\,(1 - \text{مس بر مس ھ})}$$

اب فرض کرو کہ ھ ایسا چھوٹا ہے کہ ھ کی جگہہ مس ھ رکھہ سکیں اور بر تقریباً برابر ۹۰° کے نہیں ہے اسلئے مس بر مس ھ کو ساقط کر سکتے ہیں تو

$$\text{مس}(\text{بر}+\text{ھ}) - \text{مس بر} = \frac{\text{ھ}}{\text{حم}^2\text{بر}} = \text{ھ قط}^2\text{بر}$$

اور ھ کے علامت بدلنے سے

$$\text{مس}(\text{بر}-\text{ھ}) - \text{مس بر} = -\text{ھ قط}^2\text{بر}$$

اسے دعوی ثابت ہے

(۱۸۹) دفعہ گذشتہ کے نتیجے سے ہم وہی قاعدہ استخراج کر سکتے ہیں جو دفعہ ۱۸۴ میں جیب کے واسطے استخراج کیا تھا اب یہہ تحقیق کرتے ہیں کہ دفعہ گذشتہ کی تقریبی صورت قانون کے استعمال سے غلطی کسقدر ہوتی ہے ہمکو معلوم ہے کہ

$$\frac{\text{مس ھ}}{\text{حم}^2\text{بر}\,(1 - \text{مس بر مس ھ})} = \text{مس ھ قط}^2\text{بر}\,(1 - \text{مس بر مس ھ})^{-1}$$

$$= \text{مس ھ قط}^2\text{بر}\,(1 + \text{مس بر مس ھ} + \text{مس}^2\text{بر مس}^2\text{ھ} + \dots)$$

اب اگر اول رقم مس ھ قط² بر کے لیں اور باقی سلسلہ کے ارقام کو مس² ھ قط² بر مس بر سے ساقط کریں تو تقریباً $\text{ھ}^2\,(1+\text{مس}^2\text{بر})\,\text{مس بر}$ حاصل ہوگا اب ہمارے پاس جدول اصلی جیبوں کی ہے اور اوسمیں ہر دقیقہ کا مماس لکھا ہوا ہے اور ہمکو اون زاویوں کے مماس دریافت کرتے ہیں جو جدولی زاویوں کے بیچ میں واقع ہوں اور ھ کی سب سے بڑی قیمت یہہ ہے

سکد وہ ایک دقیقہ کے زاویہ کا مقیاس قوسی ہو یعنی $\frac{\text{کہ}}{۱۸۰ \times ۶۰}$ یعنی ۰۰۰۳ء۰ تقریباً ہوا سے معلوم ہوا کہ سب سے بڑی غلطی کی مقدار چھوٹی (۰۰۰۳ء۰) (۱ + مس بر) سے نہ ہوگی اور اسیواسطے اگر بر بڑا نہیں ہے سے نہو تو ساتوین مرتبہ مین اعشاریہ کے غلطی واقع ہوگی اور اگر ہماری پاس جدول ایسی ہو کہ ہر یک دس ثانیہ کا مماس اوسمین لکھا ہو تو سب سے بڑی قیمت ھہ کی یہہ ہوگی کہ وہ مقیاس قوس دس ثانیون کا ہو یعنی $\frac{\text{کہ}}{۱۸۰ \times ۶۰ \times ۶}$ یعنی ۰۰۰۰۵ء۰ تقریباً اس صورت مین اعشاریہ کے ساتوین مرتبہ مین بہی غلطی اوس حالت مین نہین پڑیگی کہ مس بر ایسا بڑا نہو کہ اوسکا مماس ۶ سے بڑا ہو جدول سے معلوم ہوتا ہے کہ مس ۸۰° کا کچہہ ہی کم ۶ سے ہوتا ہے

(۹۰) چونکہ مس (بر + ھہ) ــ مس بر = ھہ قط^2 بر تقریباً اور قط بر کبہی چہوٹا واحد سے نہین ہوتا اسلیے مماس متصلہ کی تفاوت ہمیشہ قابل لحاظ کے ہوتی ہین اونکی فرق ایسی چھوٹے نہین ہوتے کہ اونکو محسوب نکرین مگر ہمنے دفعہ بالا مین ثابت کیا ہی کہ جب زاویے تقریباً برابر قائمون کے ہوتے ہین تو تفاوت اونکے بے قاعدہ ہوتے ہین

(۱۹۱) ہم نے ثابت کیا ہے

مس (بر + ھہ) ــ مس بر = ھہ قط^2 بر تقریباً

بر کی جگہہ $\frac{\text{کہ}}{۲}$ ــ بر رکہو تو

مس ($\frac{\text{کہ}}{۲}$ ــ بر + ھہ) ــ مس ($\frac{\text{کہ}}{۲}$ ــ بر) = ھہ قط^2 ($\frac{\text{کہ}}{۲}$ ــ بر)

یعنی مم (بر ــ ھہ) ــ مم بر = ھہ حم^2 بر

علامت ھہ کی بدل دو تو

مم (بر + ھہ) ــ مم بر = ــ ھہ حم^2 بر

یہہ دعوی اور طرح سے بہی ثابت ہو سکتا ہی جسکو کچہہ تعلق دفعہ بالا سے نہو گا اب ہم اوسکو لکھتے ہین

(۱۹۲) بالعموم ثابت کرو کہ کسی زاویہ کے مماس التمام مین جو تغیر ہوتا ہی وہ تقریبا مناسب زاویہ کے تبدل کے ہوتا ہے

ہم کو معلوم ہے کہ مم (بر ـ ھ) ـ مم بر = جم (بر ـ ھ) / جب (بر ـ ھ) ـ جم بر / جب بر

= [جم (بر ـ ھ) جب بر ـ جم بر جب (بر ـ ھ)] / [جب (بر ـ ھ) جب بر] = جب (بر ـ بر + ھ) / [جب (بر ـ ھ) جب بر]

= جب ھ / [جب (بر ـ ھ) جب بر] = جب ھ / [جب بر (جم ھ ـ جب ھ جم بر)]

= مس ھ / [جب^۲ بر (۱ ـ مس ھ مم بر)]

اب فرض کرو کہ ھ ایسا چھوٹا ہی کہ مس ھ کی جگہہ ھ رکھہ سکتے ہین اور بر ایسا چھوٹا نہین کہ ہم بر مس ھ کو قابل لحاظ کے نہ سمجھین پس یہہ حاصل ہوگا کہ

مم (بر ـ ھ) ـ مم بر = ھ / جب^۲ ھ = ھ قم^۲ بر

ھ کی علامت بدلنے سے

مم (بر + ھ) ـ مم بر = ـ ھ قم^۲ بر

اسسے دعوی ثابت ہی

(۱۹۳) بالعموم ثابت کرو کہ کسی زاویہ قاطع الزاویہ مین تغیر ہوگا وہ متناسب زاویہ کے تبدل کے ہوگا

ہمکو معلوم ہے کہ

قط (بر + ھ) ـ قط بر = ۱ / جم (بر + ھ) ـ ۱ / جم بر

= [جم بر ـ جم (بر + ھ)] / [جم بر جم (بر + ھ)] = [جب ھ جب بر + (۱ ـ جم ھ) جم بر] / [جم^۲ بر (جم ھ ـ جب ھ مس بر)]

= مس ھ مس بر (۱ + مس ھ/۲ مم بر) / [جم بر (۱ ـ مس بر مس ھ)]

اب فرض کرو کہ ھ ایسا چھوٹا ہی کہ ہم ھ کی جگہہ مس ھ رکھہ سکتے ہین اور بر نہ تو بہت چھوٹا ہے اور نہ تقریبا مساوی ۹۰ کے ہے اسلیئے مس بر مس ھ اور مم بر مس ھ/۲ کو ساقط کرسکتے ہین پس تقریبا یہہ ہمکو حاصل ہوگا کہ

قط (بر + ھہ) ـ قط بر = ھہ جب بر / جم ۲ بر = ھہ جب بر قط۲ بر

ھہ کی علامت بدلنے سے

قط (بر ـ ھہ) ـ قط بر = ـ ھہ جب بر قط۲ بر

اسّے دعوی ثابت ہے

(۱۹۴) ہمنے ثابت کیا ہے کہ

قط (بر + ھہ) ـ قط بر = ھہ جب بر قط۲ بر

بر کی جگہہ ک/۲ ـ بر رکھو تو

قط (ک/۲ ـ بر + ھہ) ـ قط (ک/۲ ـ بر) = ھہ جب (ک/۲ ـ بر) قط۲ (ک/۲ ـ بر)

یعنی قم (بر ـ ھہ) ـ قم بر = ـ ھہ جم بر قم۲ بر

اب ہم اسکو اسطرح بھی ثابت کرسکتے ہین کہ اوسکو کچھہ تعلق دفعہ گذشتہ سے نہوگا

(۱۹۵) دفعہ ۱۸۹ مین جس طرح تحقیقات ہوئی تھی اوسیطرح تحقیقات کرکے ہم جان سکتے ہین کہ دو اوپر کے دفعون کی صورقانونی کے استعمال سے کسقدر غلطی ہوتی ہے اس تحقیقات سے یہہ معلوم ہوگا کہ جب زاویے بہت چھوٹے ہون تو متصل قاطع الزاویون کے تفاوت بیقاعدہ ہوتے ہین اور قابل لحاظ کے نہین ہوتے اور جب زاویے قریب قائمون کے ہوتے ہین تو تفاوت متصل قاطع الزاویون کے بیقاعدہ ہوتے ہین اور جب زاویے بہت چھوٹے ہوتے ہین تو تفاوت متصل کے قاطع التمام کے بیقاعدہ ہوتے ہین اور جب زاویے تقریباً برابر قائمہ کے ہوتے ہین تو تفاوت متصل کے قاطع التمام کے بیقاعدہ ہوتے ہین اور قابل لحاظ کے نہین ہوتے

اب ہم یہہ بیان کرتے ہین کہ اجزاء متناسب کا اصول لوگارثمی علم مثلثی جدولون مین کہانتک چل سکتا ہے

(۱۹۶) بالعموم ثابت کرو کہ کسی زاویہ کی جیب لوگارثم جدولی مین جو تغیر ہوگا وہ تقریباً متناسب زاویہ کے تبدل کے ہوگا

ہم کو معلوم ہے کہ جب (بر + ھ) = جب بر + ھ جم بر کے تقریباً

اسیواسطے $\frac{\text{جب (بر + ھ)}}{\text{جب بر}}$ = ۱ + ھ مم بر

اسیواسطے لوک جب (بر + ھ) - لوگ جب بر = لوک $\frac{\text{جب (بر + ھ)}}{\text{جب بر}}$ = لوک (۱ + ھ مم بر)

اور لوک (۱ + ھ مم بر) = لب ھ مم بر تقریباً بموجب دفعہ (۱۴۸) کے اسمین لب قالب لوکارثمی ہی پس تقریباً

لوک جب (بر - ھ) - لوک جب بر = - لب ھ مم بر

اب فرض کرو کہ جدول لوکارثم کو ل تعبیر کرتا ہی تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ل جب (بر + ھ) = ۱۰ + لوک جب (بر + ھ)

ل جب بر = ۱۰ + لوک جب بر

اسیواسطے ل جب (بر ± ھ) - ل جب بر = ± لب ھ مم بر

اسلئے دعوی ثابت ہے

(۱۹۷) اب ہم ثابت کرینگے کہ یہی اصول اجزاء متناسب کا تمام علم شلثی جملون کے لوکارثم جدولی کی متصرف ہی اور پھر یہہ بتلائینگے کہ ان تقریبی صور قانونیہ کے کام مین لانے سے غلطی کسقدر واقع ہوگی

(۱۹۸) ہمنے ثابت کیا ہی کہ

ل جب (بر + ھ) - ل جب بر = لب ھ مم بر تقریباً

بر کی جگہہ $\frac{\pi}{2}$ - بر رکھو تو

ل جب ($\frac{\pi}{2}$ - بر + ھ) - ل جب ($\frac{\pi}{2}$ - بر) = لب ھ مم ($\frac{\pi}{2}$ - بر)

یعنی ل جم (بر - ھ) - ل جم بر = لب ھ مس بر

اور ھ کی علامت بدلنے سے

ل جم (بر + ھ) - ل جم بر = - لب ھ مس بر

اسے زاویون کے جیوب التمام کے لوکارثم جدولی مین اصول مذکور ثابت ہوا

(۱۹۹) ہمنے ثابت کیا ہے کہ تقریباً

لوک جب (بر + ھ) - لوک جب بر = لب ھ مم بر

اور لوک جم (بر + ھ) - لوک جم بر = - لب ھ مس بر

اور تفریق کرنے سے

لوک جب (بر + ھ) - لوک جم (بر + ھ) - [لوک جب بر - لوک جم بر] =

لب ھ (مم بر + مس بر)

یعنی لوک مس (بر + ھ) - لوک مس بر = ۲ لب ھ / جب ۲ بر

اسیواسطے ل مس (بر + ھ) - ل مس بر = ۲ لب ھ / جب ۲ بر

اور ھ کی علامت بدلنے سے

ل مس (بر - ھ) - ل مس بر = - ۲ لب ھ / جب ۲ بر

اسسے زاویون کے مماسون کے لوکارثم جدولی مین اصول مذکورہ ثابت ہوا

اور بر کی جگہہ π/۲ - بر کو لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ل مم (بَر ∓ ھ) - ل مم بَر = ± ۲ لب ھ / جب ۲ بَر

اسسے زاویون کے مماس التمامون کے لوکارثم جدولی مین اصول مذکور ثابت ہوا

(۲۰۰) ہمنے ثابت کیا ہے کہ

لوک جب (بر + ھ) - لوک جب بر = لب ھ مم بر تقریباً

اسیواسطے لوک ۱/جب (بر + ھ) - لوک ۱/جب بر = - لب ھ مم بر

یعنی لوک قم (بر + ھ) - لوک قم بر = - لب ھ مم بر

اسیواسطے ل قم (بر + ھ) - ل قم بر = - لب ھ مم بر

اور ھ کی علامت بدلنے سے

ل قم (بر - ھ) - ل قم بر = لب ھ مم بر

اسلئے اصول مذکور قاطع التمام کی صورتمین ثابت ہوتا ہے اور بر کی جگہہ $\frac{\pi}{2}$ - بر رکہنے سے

ل قطا (بر ∓ ھہ) - ل قطا بر = ∓ لب ھہ مس بر

حاصل ہوتا ہے اور اسی اصول مذکور قاطع الزاویہ کی صورتمین ثابت ہوتا ہے

(۲۰۱) دفعات ۱۹۶ - ۲۰۰ کے نتائج سے وہ قاعدے ثابت ہوتے ہین جنکی مثالین دفعات ۱۷۱ - ۱۷۴ مین لکہی ہین - ہمنے اور لوکارثمی جملہ جب کے لوکارثمی جملہ سے استنباط کرکے لکہی ہین اسیطرح اس تحقیقات کے کرنے مین کہ غلطی کسقدر ہوتی ہے جب کی لوکارثمی جملہ کی مقدار غلطی دریافت کرکے اور لوکارثمی جملون کی غلطیون کی مقدار دریافت کرسکتے ہین تقریبی صورت قانونی اور جملونکی اسطرح بہی ثابت ہوسکتی ہین کیونکو کچہہ واسطہ صورت قانونی جیب سے نہو تمثیلاً لوکارثم جیب اور لوکارثم مماس کی صورت کو ہم ثابت بہی کرتے ہین

(۲۰۲) بالعموم ثابت کرو کہ کسی زاویہ کی جیب التمام کے لوکارثم جدولی مین جو تغیر ہو وہ تقریباً متناسب اوس زاویہ کے تبدل کے ہوتا ہے

ہمکو معلوم ہے کہ جم (بر - ھہ) = جم بر + ھہ جب بر تقریباً

اسیواسطے $\frac{\text{جم (بر - ھہ)}}{\text{جم بر}}$ = ۱ + ھہ مس بر

اسیواسطے لوک جم (بر - ھہ) - لوک جم بر = لوک $\frac{\text{جم (بر - ھہ)}}{\text{جم بر}}$ = لوک (۱ + ھہ مس بر)

اور لوک جم (بر - ھہ) - لوک جم بر = لب ھہ مس بر تقریباً

اسیواسطے ل جم (بر - ھہ) - ل جم بر = لب ھہ مس بر

اور ھہ کے علامت بدلنے سے

ل جم (بر + ھہ) - ل جم بر = - لب ھہ مس بر

(۲۰۳) بالعموم ثابت کرو کہ کسی زاویہ کے مماس کی لوکارثم جدولی مین جو تغیر ہو وہ تقریباً متناسب اوس زاویہ کے تبدل کے ہوتا ہے

ہمکو معلوم ہے کہ مس (بر + ھہ) = مس بر + ھہ قطا بر تقریباً

اسیواسطے $\frac{\text{مس (بر + ھ)}}{\text{مس بر}} = ۱ + \frac{\text{ھ قط}^۲ \text{بر}}{\text{مس بر}} = ۱ + ۲ \text{ھ قم ۲ بر}$

اسیواسطے لوک مس (بر + ھ) - لوک مس بر = لوک (۱ + ۲ ھ قم ۲ بر)

= ۲ لب ھ قم ۲ بر تقریباً

اسیواسطے ل مس (بر + ھ) - ل مس بر = ۲ لب ھ قم ۲ بر

ھ کی علامت بدلنے سے

ل مس (بر - ھ) - ل مس بر = - ۲ لب ھ قم ۲ بر

(۲۰۴) اس تقریبی صورت قانونیہ کے استعمال سے جسقدر غلطی ہوتی ہے اب ہم اوسکا بیان کرتے ہین

ل جب (بر + ھ) - ل جب بر = لب ھ مم بر

اس صورت کے حاصل کرنیکے واسطے ہم نے لوک (۱ + ھ مم بر) کی برابر لب ھ مم بر لکھا ہے اور اس لکھنے مین ھ مم بر کے مربع اور مربع سے زیادہ قوا پر کچھہ لحاظ نہین کیا اونکو چھوڑ دیا لیکن جب بر نہایت چھوٹا ہو تو مم بر نہایت بڑا ہوگا اسلئے ھ^۲ مم^۲ بر اس قابل نہوگا کہ اوس پر کچھہ لحاظ نہ کیا جاے اسلئے اس صورت کی تحقیقات اور زیادہ ہونی چاہیے

دفعہ ۱۸۱ مین ہم نے ثابت کیا ہے کہ

جب (بر + ھ) - جب بر = جب ھ جم بر (۱ - مس بر مس $\frac{\text{ھ}}{۲}$)

فرض کرو کہ ھ ایسا چھوٹا ہے کہ ھ کو بجای جب ھ کے اور $\frac{\text{ھ}}{۲}$ کو بجای مس $\frac{\text{ھ}}{۲}$ کے لکھہ سکتے ہین تو

جب (بر + ھ) - جب بر = ھ جم بر - $\frac{\text{ھ}^۲}{۲}$ جب بر کے تقریباً حاصل ہوگا

اسیواسطے $\frac{\text{جب (بر + ھ)}}{\text{جب بر}} = ۱ + \text{ھ مم بر} - \frac{\text{ھ}^۲}{۲}$

اسیواسطے لوک $\frac{\text{جب (بر + ھ)}}{\text{جب بر}}$ = لوک (۱ + ھ مم بر - $\frac{\text{ھ}^۲}{۲}$)

= لب (ھ مم بر - $\frac{\text{ھ}^۲}{۲}$) - $\frac{\text{لب}}{۲}$ (ھ مم بر - $\frac{\text{ھ}^۲}{۲}$)^۲ + . . دفعہ ۱۴۵

= لب ھ مم بر - $\frac{\text{لب ھ}^۲}{۲}$ (۱ + مم^۲ بر) + ...

اب اگر ھ کی قوا کو جو ھ^۲ سے بڑے ہون ساقط کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

لوک جب (ھہ + بر) ـ لوک جب بر = لب ھہ مم بر ـ لب ھہ۲/۲ قم بر

اب اگر ہمارے پاس جدول ایسی ہے کہ اوسمین ہر دس ثانیہ کے جملے لکھے ہین تو ھہ کی سب سے بڑی قیمت ۱۰ ثانیہ کی مقیاس قوسی ہوگی یعنی قریب ۰۰۰۰۵ء اور لب = ۱/۲ تقریباً

پس سب سے بڑی غلطی جو واقع ہوسکتی ہے ۱/۱۰^۶ قم بر ہوگی یہہ غلطی بیشک سات مرتبہ کی اعشاریہ تک حساب کرنے مین قابل لحاظ کے ہوگی اگر بہ چھوٹا ۵° سے ہو کیونکہ جدولون سے معلوم ہوتا ہے کہ جب ۵° کی ۱/۱۰ سے چھوٹی ہوتی ہے اسلئے قاطع التمام ۵° کا ۱۰ سے بڑا ہوگا

پس اس سے معلوم ہوگا کہ جب زاویئے چھوٹے ہون تو متصل کے لوکارثمی جوب مین تفاوت بیقاعدہ ہوتے ہین جبکہ بر زاویہ قایمہ کے نہایت قریب ہو تو مم بر نہایت چھوٹا ہوگا اور قم۲ بر بہت چھوٹا ہوگا پس اوپر کی صورت قانونی لوک جب (بر + ھہ) ـ لوک جب بر سے ثابت ہوتا ہے کہ جب زاویئے برابر قایمون کے ہون تو متصل کے لوکارثمی جوب کے تفاوت قابل لحاظ کے نہین ہوتے ہین اور بیقاعدہ بھی ہوتے ہین

ان نتائج سے ہم اور علم مثلثی جملون کے لوکارثمون کے واسطے نتائج استنباط کرسکتے ہین جن کا بیان دفعہ ۲۰۶ مین کیا گیا ہے

(۲۰۵) دفعہ گذشتہ سے یہہ بات ظاہر ہوتی ہے کہ جب ایک زاویہ چھوٹا ہو تو نہ اوسکی لوکارثمی جیب اور نہ لوکارثمی جیب سے وہ زاویہ جدول لوکارثمی مروج کے استعانت سے دریافت ہوسکتے ہین

کیونکہ متصل کے لوکارثمی جوب کی تفاوت گو قابل لحاظ کے ہوتے ہین مگر وہ بیقاعدہ ہوتی ہین اس دقت کے دور کرنے کے واسطے تین ترکیبین ہین

پہلی ترکیب ربعہ کے چند اول درجون کے زاویون کی ہر ثانیہ کی لوکارثمی جوب جدول مین لکھی ہوئی ہوتی ہے اس صورت مین بڑی سے بڑی قیمت ھہ کی مقیاس قوسی ایک ثانیہ کا ہوگا اور ھہ۲/۲ قم بر اسقدر چھوٹا ہوجائیگا کہ قابل لحاظ کے ہرگز نہوگا

دوسری ترکیب اسکو ڈیلمبر کی بھی ترکیب کہتے ہین ایک جدول ایسی بنی ہوئی ہوتی ہے کہ اسمین قیمت لوک جب بر/بر + ل جب اً کی ہر ثانیہ کے واسطے ربعہ کے چند درجون کے لئے لکھی ہوئی ہوتی ہے

فرض کرو کہ بر بمقیاس قوسی ن ثانیہ کے زاویہ کا ہے تو

بر = ن جب اً تقریباً بموجب دفعہ ۱۲۳ کے

اسیواسطے لوک جب بر/بر = لوک جب نً/ن جب اً = لوگ جب نً - لوک ن - لوگ جب اً

جب اً = ل جب نً - لوک ن - ل جب اً

اسیواسطے لوک ن = ل جب نً - (لوک جب بر/بر + ل جب اً)

اگر زاویہ معلوم ہو تو جدول سے قیمت لوک جب بر/بر + ل جب اً کی اور لوک ن کی اعداد کی لوکارثم جدولی سے دریافت ہو سکتی ہے پس اس صورت قانونی سے ل جب نً دریافت ہو سکتی ہے

اگر قیمت ل جب نً کی معلوم ہو اور ن دریافت کرنا ہو تو عمل اسطرح کرنا چاہئے چونکہ ل جب نً کی معلوم ہونے سے زاویہ کی قیمت تقریبی دریافت ہو سکتی ہے اور جب زاویہ معلوم ہو جاے تو جدول سے قیمت لوگ جب بر/بر + ل جب اً اور اس صورت جبریہ سے ہم کو لوک ن کی دریافت ہوگی اور جب لوک ن معلوم ہوگئی تو معمولی جدول لوکارثمی سے ن دریافت ہو سکتا ہے اس عمل مین ایک غلطی ہم یہہ کرتے ہین کہ جب بر/بر کی اصلی قیمت کی جگہہ اوسکی تقریبی قیمت کام مین لاتے ہین لیکن باب نہم سے ثابت ہو چکا ہے اور آیندہ ہم اسکو اور طرح سے خوب ثابت کرینگے کہ جب بر چھوٹا ہو تو جب بر/بر نہایت قریب قریب برابر ۱ - بر²/۶ کے ہوتا ہے اسواسطے چھوٹی سی غلطی بر کی ہماری حساب مین کوئی غلطی قابل لحاظ کے نہین پیدا کریگی کیونکہ لوک جب بر/بر بہ نسبت بر کے بہت ہی کم جلد تبدیل ہوگا

تیسری ترکیب اس ترکیب کا نام میسکی لائن کی ترکیب ہے یہہ ترکیب اوسوقت عمل مین آسکتی ہے کہ

جدولین ایسی موجود نہون جیسی کہ اوپر کی ترکیب مین بیان ہوئین

باب نہم سے یہہ نتیجہ نکل سکتا ہی کہ جس وقت بر بہت ہی چہوٹا ہو تو

جب بر = بر − بر³/۶ و جم بر = ۱ − بر²/۲ (اس نتیجہ کو آگے بہی بہت تفصیل کے ساتھہ ثابت کرینگے)

اسواسطے جب بر/بر = ۱ − بر²/۶ = (۱ − بر²/۲)^{۱/۳} کے تقریباً

= (جم بر)^{۱/۳} تقریباً

اس صورت سے لوک جب بر کی بر کے معلوم ہونے سے ایک ہی دفعہ مین معلوم ہو جائینگی اور اگر

لوک جب معلوم ہو تو قیمت بر کی تقریباً دریافت کرسکتے ہین اور پہر اوسے لوک جم بر کی تقریباً

دریافت کرسکتے ہین تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا

لوک بر = لوک جب بر − ۱/۳ لوک جم بر

اب یہان چونکہ جم بر بہ نسبت بر کے بہت ہی کم جلد بدلتی ہے اسلئے لوک جم بر کی تقریباً قیمت

بجای اصلی قیمت کے کام مین لانے سے کوئی غلطی قابل لحاظ کے نہین پیدا ہوگی

اور اسی قبیل کی صورت قانونی چہوٹے زاویہ کے مماس کے واسطے بہی حاصل ہوسکتی ہے

دلیل مس بر = جب بر/جم بر = (بر − بر³/۶) (۱ − بر²/۲)^{-۱} تقریباً

اسواسطے مس بر/بر = (۱ − بر²/۶) (۱ + بر²/۲)

= ۱ + بر²/۳ = (۱ − بر²/۲)^{-۲/۳} تقریباً

اسواسطے لوک مس بر = لوک بر − ۲/۳ لوک جم بر تقریباً

(۲۰۶) اس باب مین جو نتائج بعد تحقیقات کے لکہی گئی ہین اونسکو یہان ایک جگہہ لکہدیتے ہین

تمام علم مثلثی جملون مین خواہ وہ اصلی ہون یا لوکارثمی ہون باستثناء خاص صورتون کے اصول اجزاء

متناسب کا استعمال ہوسکتا ہی اور یہہ خاص صورتین اوسوقت واقع ہوتی ہین کہ زاویے

چہوٹے ہون یا تقریباً برابر قائمہ کے ہون ان مثلثی صورتون مین متصل کے جملون کا تفاوت

بعض اوقات صرف بیقاعدہ ہوتا ہی اور بعض اوقات قابل لحاظ کے نہین ہوتا یعنی ہیچ ہوتا ہے

اور اوسوقت وہ بیقاعدہ ہی ہوتا ہے

اصلی جملون مین تو یہہ صورتین مستثنی ہین کہ جسوقت زاوئی تقریباً برابر قائمون کے ہون تو جیب مین تفاوت قابل لحاظ کے نہین ہوتے یعنی صحیح ہوتے ہین اور جس وقت زاویے چھوٹے ہوتے ہین اوسوقت جیب التمام مین تفاوت قابل لحاظ کے نہین ہوتے اور جس وقت زاوئیے تقریباً برابر قائمے کے ہوتے ہین تو تفاوت بیقاعدہ ہوتے ہین اور جس وقت زاویے چھوٹے ہوتے ہین مماس التمام مین تفاوت بیقاعدہ ہوتے ہین اور جب زاوئیے چھوٹے ہوتے ہین تو قاطع الزاویہ مین تفاوت قابل لحاظ کے نہین ہوتے اور جب زاوئیے قائمہ کے قریب ہوتے ہین تو وہ بیقاعدہ ہوتے ہین اور جب زاوئیے چھوٹے ہوتے ہین تو قاطع التمام مین تفاوت بیقاعدہ ہوتے ہین اور جب زاوئیے قریب قائمہ کے ہوتے ہین تو تفاوت قابل لحاظ کے ہوتے ہین سر لوکارثمی جملہ مین اوس حالت مین کہ زاویے چھوٹے ہون یا برابر قائمون کے ہون صول اجزاء متناسب کا نہین چل سکتا جب زاوئیے چھوٹے ہون تو لوگ جیب اور لوگ قاطع التمام مین تفاوت بیقاعدہ ہوتے ہین اور جب زاوئیے برابر قائمون کے ہون تو تفاوت قابل لحاظ کے نہین ہوتے اور جب زاوئیے چھوٹے ہوتے ہین تو لوگ جیب التمام اور لوگ قاطع الزاویہ مین تفاوت قابل لحاظ کے نہین ہوتے اور جب زاوئیے برابر قائمون کے ہوتے ہین تو تفاوت بیقاعدہ ہوتے ہین اور جب زاوئیے چھوٹے یا تقریباً برابر قائمون کے ہوتے ہین تو لوگ مماس اور لوگ مماس التمام مین تفاوت بیقاعدہ ہوتے ہین

(۲۰۷) لوکارثمی جدولون کے استعمال کے لئے یہہ ضرور ہے کہ اون صورتون سے حتی الامکان احتراز کرین جنمین اصول اجزاء متناسب کا استعمال نہو سکتا ہو اسکے یہہ معنی ہین کہ ہم جدولونکے استعمال مین حتی الوسع یہہ کوشش کرین کہ جملونکے تفاوت مطابق زاویونکے چھوٹے تفاوت کے قابل لحاظ کے اور باقاعدہ ہون اگر تفاوت جملونکے قابل لحاظ کے خاص مراتب اعشاریہ تک نہون تو ہم کسی ترکیب سے قیمت جملہ کی کسی زاویہ یا بینی کی نہین دریافت

کرینگے اور عمل معکوس نہین کرینگے جب تک خاص مراتب اعشاریہ کے قید لگی ہی اگر تفاوت جملہ
کے بیقاعدہ ہین تو ہم کسی ترکیب سے زاویہ یا بنی کی قیمت نہین دریافت کر سکتے اور نہ عمل
معکوس بوساطت اصول اجزاء متناسب کے کر سکتے ہین گو وہی رقمین رہنے دین جنکو اول
تقریبی قیمت مین چہوڑ دیا تہا

(۲۰۸) اگر ہمکو ایک زاویہ اصلی جیب اور جیب التمام سے دریافت کرنا ہو تو یہہ مناسب ہوگا کہ اگر زاویہ
۴۵° سے کم ہو تو اصلی جیب کو کام مین لائین اور اگر زاویہ ۴۵° سے بڑا ہو تو جیب التمام کو کام مین لاوین
اسواسطے کہ متصل جیبون کے تفاوت تقریباً ایسی ہی بدلتی ہین جیسے کہ جیب التمام زاویہ کی اوسکی
متصل جیب التمام کے تفاوت تقریباً ایسی ہی بدلتی ہین جیسے کہ جیب زاویہ کی اوسکی تفاوت
متصل کے جوب کے بڑی بنسبت تفاوت متصل کے جوب التمام کے ہوتے ہین اگر زاویے چہوٹے
۴۵° سے ہون اور چہوٹے ہوتے ہین اگر زاویے ۴۵° سے بڑے ہون اور یہی کیفیت جیب اور جیب التمام
کے لوکارثمون کی ہے

(۲۰۹) اگر طالب علم اصول علم جبریات سے واقف ہوگا تو اوسکو یہہ بات معلوم ہوگی کہ اس مسئلہ کے
بابت نتائج ٹیلر صاحب کے ضابطہ سے استخراج ہو سکتے ہین اور اس سبب سے یہہ نتائج خوب یاد رہ سکتے ہین
اور جب اونکو چاہین ذہن میں جاری کر سکتے ہین مثلاً اصلی جیب پر خیال کرو تو بموجب ضابطہ ٹیلر کے

جب (بر + ہہ) = جب بر + ہہ جم بر − $\frac{ہہ}{۲}$ جب (بر + لر ہہ)

اسمین لر ایک کسر واجب ہے اس صورت قانونی سے ثابت ہوتا ہی کہ اگر ہم

جب (بر + ہہ) = جب بر + ہہ جم بر رکہین

تو غلطی کم $\frac{ہہ}{۲}$ سے واقع ہوگی اور علاوہ برین ہم یہہ دیکہتے ہین کہ بر جب چہوٹا ہو تو
رقم $\frac{ہہ}{۲}$ جب (بر + لر ہہ) بمقابلہ ہہ جم بر کے نہایت ہی چہوٹی ہے اور برخلاف
اسکے جس وقت بر مساوی کچہ کے تقریباً ہو تو اصول اجزاء متناسب کا غیر مناسب
ہو جاتا ہے کیونکہ $\frac{ہہ}{۲}$ جب (بر + لر ہہ) بمقابلہ ہہ جم بر کے قابل لحاظ کے ہوتا ہے

ایسا صحیح نہیں ہوجاتا جیسا کہ پہلی صورت مین تھا
اب پھر موجب ٹیلر صاحب کے ضابطہ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

$$\text{لوک جب (بر + ھھ)} = \text{لوک جب بر} + \text{لب ھھ مم بر} - \frac{\text{لب ھھ}^2}{2}\ \text{مم}^2\ \text{(بر + لر ھھ)}$$

اسمین لب قالب لوکارثمی ہے اور لر کوئی کسر واجب ہے اس مساوات سے ثابت ہوتا ہے کہ اصول اجزاء متناسب کا بالعموم لوکارثمی جیب مین استعمال ہوسکتا ہے مگر جب زاویے چھوٹے ہون تو تفاوت متصل کے لوکارثمی جیوب کے بیقاعدہ ہوتے ہین اور جب زاویے تقریباً برابر قائموں کے ہون تو تفاوت بیقاعدہ اور صحیح ہونگے

(۲۱۰) اصول اجزاء متناسب کے سبب سے جو غلطیان واقع ہوتی ہین اونکا تخمینہ ٹیلر صاحب کے ضابطہ کے استعمال سے بخوبی ہوجاتا ہے مثلاً لوکارثمی جیب لو تو ہمکو معلوم ہے کہ

$$\text{لوک جب (بر + ھھ)} = \text{لوک جب بر} + \text{لب ھھ مم (بر + لر ھھ)}$$

اسمین لبعض کسر واجب ہے تقریبی قیمت کے دریافت کرنے مین مم بر کو بجای مم (بر + لر ھھ) کے رکھا ہے اور اسلئے قیمت لوک جب (بر + ھھ) − لوک جب بر کی بابین لب ھھ مم بر اور لب ھھ مم (بر + ھھ) کے واقع ہے پس غلطی کم نسبت

لب ھھ [مم بر − مم (بر + ھھ)] کے واقع ہوتی ہے

امثلہ متفرقہ

(۱) ایک قائم الزاویہ کے زاویون مین سے ایک زاویہ سے عمود اوسکے قطر پر نکالا گیا ہے اور جس نقطہ پر یہہ عمود قطر کو قطع کرتا ہے اوس نقطہ سے عمود اون اضلاع پر نکالی گئی ہین جو مقابل زاویہ کے محیط مین تو اگر ان اخیر عمودون کے طول ع اور ع' ہون اور ح طول قطر کا ہو تو ثابت کرو

$$\text{ع}^{\frac{2}{3}} + \text{ع'}^{\frac{2}{3}} = \text{ح}^{\frac{2}{3}}$$

(۲) اگر دو دائرے جنکے قطر ط اور ص ہین ایک دوسرے کو مس کرین اور ان دائرون کے دو مماس مشترک کا درمیانی زاویہ بر ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب بر} = \frac{\text{۴ (ط − ص) ۲ ط ص}}{\text{(ط + ص)}^{۲}}$$

(۳) معلوم ہے کہ قطا سہ قطا بر + مس سہ مس بر = قطا صہ تو مس بر کو دریافت کرو

(۴) جس وقت بر = ۰ تو

$$\frac{\text{جب } \frac{۱}{۲} \text{ جم ۲ بر}}{\text{جیب بر جم بر}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{مس ۱ بر}}{\text{قطا ۲ بر − ۱}}$$ کی قیمت دریافت کرو

(۵) ثابت کرو کہ مم ½ بر بڑا ۱ + مم بر سے ہے ۰ اور ۲ کے درمیان تمام قیمتیں بر کی دریافت کرو

(۶) اگر $\text{مس } \frac{\text{بہ}}{۲} = \frac{\text{مس ۱ بر + ح − ۱}}{\text{مس بر + ح + ۱}}$ تو مس $\frac{\text{بہ}}{۲}$ کو دریافت کرو

(۷) قیمت بر کی ایسی دریافت کرو کہ وہ شرائط ان دونوں مساواتوں کی پورا کریں

ط قطا^{۲} بر − ص جم بر = ۲ ط اور ص جم^{۲} بر − ط قطا بر = ۲ ص

(۸) سہ اور صہ کو ان مساواتوں سے دور کرو

ط = جیب سہ جم صہ جیب بر + جم سہ جم بر

ص = جیب سہ جم صہ جم بر − جم سہ جیب بر

ح = جیب سہ جیب صہ جیب بر

(۹) سہ اور صہ کو ان مساواتوں سے دور کرو

ص + ح جم سہ = لو جم (سہ − بر) ص + ح جم صہ = لو جم (صہ − سہ) اور سہ − صہ = ۲ جر

اور ثابت کرو کہ لو^{۲} − ۲ لو ح جم بر + ح^{۲} = ص^{۲} قطا جر

(۱۰) ان مساواتوں میں سے لا کو دور کرو

$$\frac{\text{ط مس ۱ بر − لا}}{\text{مس}^{۲}\text{ سہ مس}^{۲}\text{ سہ}} = \frac{\text{۲ ط مس بر}}{\text{مس}^{۲}\text{ سہ + مس}^{۲}\text{ سہ}} = \text{ط − لا}$$

اور ثابت کرو کہ بر = سہ + سہَ یا $\frac{\pi}{۲}$ + سہ + سہَ کے

(۱۱) بر اور سر کو ان مساواتوں سے دور کرو

جیب بر + جیب سر = ط اور جم بر + جم سر = ص اور جم (بر − سر) = ح

(۱۲) بر اور سر کو ان مساواتوں سے دور کرو

لاجم بر + ی جب بر = ط اور لاجم (بر + ۲ سر) بر − ی جب (بر + ۲ سر) = ط

ص جب (بر + سر) = ط جب سر

(۱۳) لا اور ی کو ان مساواتوں سے دور کرو

مس لا + مس ی = ط اور مم لا + مم ی = ص　لا + ی = ح

(۱۴) بر کو ان مساواتوں سے دور کرو

لا / ط = (قط² بر − جم² بر) / (قط² بر + جم² بر)　ص / ی = قط² بر حظ² بر + جم² بر

(۱۵) بر کو ان مساواتوں سے دور کرو

(ط + ص) مس (بر − سر) = (ط − ص) مس (بر + سر)

جم ۲ سر + ص جم ۲ بر = ح

(۱۶) لا² / ط² جم بر = ی² / ط² جم بر + ی² / ص² جم بر

اور لا / جب (بر + بر) = ی / جب (بر − بر) = ی / جب ۲ بر

تو ثابت کرو کہ جب بر / جب بر = ص² / ط²

(۱۷) سر کو ان مساواتوں سے دور کرو

ی جم سر − لا جب سر = ط جم ۲ سر اور ی جب سر + لا جم سر = ۲ ط جب ۲ سر

اور ثابت کرو کہ (لا + ی)^⅔ + (لا − ی)^⅔ = ۲ ط^⅔

(۱۸) بر اور سر کو ان مساواتوں سے دور کرو

جم بر = جب صہ / جب سہ　جم سر = جب لہ / جب سہ

جم (بر − سر) = جب صہ جب لہ

اور ثابت کرو کہ مس² سہ = مس² صہ + مس² لہ

(۱۹) بر کو ان مساواتوں سے دور کرو

م = قم بر − جب بر اور ن = قط بر − جم بر

(۲۹) معلوم ہے کہ جب ر جب سر = جب سہ جب صہ اور س سر جم صہ = جم ؎ تو ثابت کرو کہ جب ؎ کی قیمتون مین سے جب ؎ جب صہ ایک قیمت ہے

(۳۰) معلوم ہے کہ جب سر = ن جب ر اور س سر = م س ر تو ن کی ایسی قیمتین محدود دریافت کرو کہ یہہ دونو مساواتین ایک ہی وقت قائم رہین

(۳۱) علم مثلثی قوانین سے ثابت کرو کہ اگر لا + ر + ی = لا ر ی تو

$$\frac{۳ لا}{۱ - لا^۲} + \frac{۳ ر}{۱ - ر^۲} + \frac{۳ ی}{۱ - ی^۲} = \frac{۳ لا}{۱ - لا^۲} \cdot \frac{۳ ر}{۱ - ر^۲} \cdot \frac{۳ ی}{۱ - ی^۲}$$

(۳۲) و اور لا اور ر اور ی کے قیمتین ان مساواتون سے دریافت کرو

$$و = \frac{جب لا}{جب ط} = \frac{جب ر}{جب ص} = \frac{جب ی}{جب ح} \quad \text{اور} \quad لا + ر + ی = ۲ کہ$$

(۳۳) (جم سہ لا) قم صہ لا کی حد اوس صورت مین کہ لا صفر ہو دریافت کرو

(۳۴) اصلی مماسون کی ایک جدول سات مرتبہ کی اعشاریہ تک ہے تو ثابت کرو کہ جب زاویہ ۰ؐ کے قریب ہو تو ایک ثانیہ کی $\frac{۱}{۲۰}$ حصہ تک زاویہ دریافت ہو سکتا ہے

(۳۵) جب زاویہ بہت قریب ۴۸ؐ ۳۶ََ کے ہو تو ثابت کرو کہ ثانیہ کے $\frac{۱}{۲}$ حصہ تک زاویہ ل جب سے تحقیق ہو سکتا ہے اور یہہ ہمکو معلوم ہے کہ لوگ ی ۱۰ مس ۴۸ؐ ۳۶ََ = ۹۲۰۸۳۶۲۴ اور جدولین سات مرتبہ کے اعشاریہ تک ہین

(۳۶) ثابت کرو

$$(۱ - س \frac{سہ}{۲})(۱ - س \frac{سہ}{۲^۲})(۱ - س \frac{سہ}{۲^۳}) \cdots \text{لا انتہا} = \frac{سہ}{\text{س سہ}}$$

(۳۷) اگر ا اور ب اور س مثبت زاویے ہون اور اس مساوات

$$جب^۲ ا + جب^۲ ب + جب^۲ س = ۱$$

کی شرائط کو پورا کرتے ہون تو ثابت کرو کہ ا + ب + س ۹۰ؐ سے بڑا ہے

(۳۸) زاویہ معلوم سہ کے مماس اور قاطع الزاویہ اور زاویے کے مطابق قوس کو مس کرتا ہوا ایک دائرہ کھینچا گیا ہے تو اوسکے نصف قطر کی قیمت دریافت کرو اور اوسکی

دوہری قیمت کے معنی بیان کرو اور اگر ایک قیمت اصل دائرہ کی نصف قطر کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ سہ = ۲م/۳

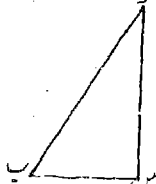
تیرھوان باب

مثلث کے اضلاع اور اوسکے زاویون کے علم مثلثی جملون کے ارتباطات

(۲۱۱) مثلث کے اضلاع اور اوسکی زاویون کے علم مثلثی جملون کے درمیان جو ارتباطات ہوتے ہین اونکی تحقیقات کرتے ہین اور یہہ ارتباطات آیندہ مثلثون کے حل کرنیمین بڑی کام آینگے مثلث کے زاویون کو حروف ا اور ب اور س سے تعبیر کرینگے اور اونکے مقابل کے ضلعون کو حروف طا و طب و طس سے پس حروف طا و طب و طس اعداد ہین جنکو طول کسی پیمانہ واحد کے موافق بیان کی گئی ہین اور یہہ پیمانہ واحد خواہ فٹ ہو گز ہو یا کچھہ اور ہو پیمانہ واحد خواہ کچھہ ہی مقرر کرو مگر سب اضلاع کے واسطے وہ ایک ہی ہو

(۲۱۲) مثلث قائم الزاویہ مین ہر ایک ضلع برابر ہوتا ہی حاصل ضرب وتر اور زاویہ متصل کے جیب التمام کے

فرض کرو کہ ا ب س مثلث ہے جسکا س زاویہ قائمہ ہے تو

ا س / ا ب = جم ا اور ب س / ا ب = جم ب

اسواسطے طب = طس جم ا اور طا = طس جم ب

چونکہ جم ا = جب ب اور جم ب = جب ا تو اس مطلب کو یون بیان کیا کرتے ہین کہ مثلث قائم الزاویہ مین ہر ایک ضلع برابر حاصل ضرب وتر اور مقابل کے زاویہ کے جیب کے ہوتا ہے

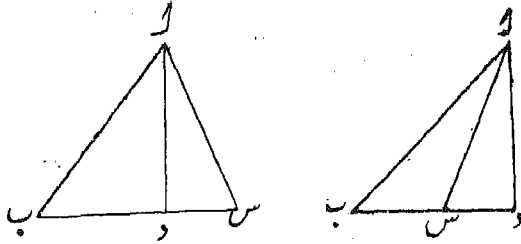
(۲۱۳) مثلث قائم الزاویہ مین ہر ایک ضلع برابر ہوتا ہے حاصل ضرب دوسرے ضلع اور اوسکے مقابل کے زاویہ کے مماس کے دفعہ گذشتہ کے شکل مین ہمکو یہہ معلوم ہے کہ

مس ا = ب س / ا س اور مس ب = ا س / ب س

اسواسطے طا = طب مس ا اور طب = طا مس ب

اور چونکہ مس ا = مم ب اور مس ب = مم ا تو اس مطلب کو اسطرح بیان کیا کرتے ہین کہ

مثلث قائم الزاویہ مین ہر ایک ضلع برابر ہوتا ہی حاصل ضرب دوسرے ضلع اور اوسکے متصل کے زاویہ کے مماس التمام کے

(۲۱۴) ہر مثلث مین اضلاع متناسب اونکے مقابل کے زاویون کے جیب کے ہوتے ہین

فرض کرو کہ ا ب س کوئی مثلث ہی اور اسے ا د عمود مقابل کے ضلع پر اوس ضلع سے نقطہ د پر ملتا ہوا نکالو اور بشرط ضرورت ضلع محدودہ پر یہہ عمود نکالو

اگر ب اور س حادی زاوئیے ہین تو بائین طرف کے شکل مین

ا د = ا ب جب ب اور ا د = ا س جب س

اسیواسطے ا ب جب ب = ا س جب س

$$\text{اسیواسطے}\quad \frac{\text{طس}}{\text{طب}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جب ب}}$$

اور اگر زاویہ س منفرجہ ہے تو دائین طرف کے شکل مین

ا د = ا ب جب ب اور ا د = ا س جب (۱۸۰° – س) = ا س جب س

اسیواسطے ا ب جب ب = ا س جب س

$$\text{اسیواسطے}\quad \frac{\text{طس}}{\text{طب}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جب ب}}$$

اور اگر س زاویہ قائمہ ہو تو دفعہ ۲۱۲ کے شکل مین

ا س = ا ب جب ب

$$\text{اسیواسطے}\quad \frac{\text{طس}}{\text{طب}} = \frac{1}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جب ب}}$$

$$\text{پس ثابت ہوا کہ ہر صورت مین}\quad \frac{\text{طس}}{\text{طب}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جب ب}}$$

اور علی ہذا القیاس طا / طب = جب ا / جب ب اور طا / طس = جب ا / جب س

اور ان نتایج کو قرینہ کے ساتھہ اس طرح لکھہ سکتے ہین

جب ا / طا = جب ب / طب = جب س / طس

(۲۱۵) مثلث کے ایک زاویہ کی جیب التمام کو اضلاع کے ارقام مین لکھو

فرض کرو کہ ا ب س ایک مثلث ہو اور س حادہ زاویہ ہے (دفعہ گذشتہ مین بائین طرف کی شکل دیکھو)

تو بموجب (۱۳ اشکال ۲ م) کے

اب^2 = بس^2 + اس^2 − ۲ ب س . س د

اور س د = ا س جم س

اسواسطے طس^2 = طا^2 + طب^2 − ۲ طا طب جم س

دوم فرض کرو کہ س زاویہ منفرجہ ہے (دفعہ گذشتہ کی داہنی طرف کی شکل دیکھو)

تو بحکم (۱۲ اشکال ۲ م) کے

اب^2 = بس^2 + اس^2 + ۲ ب س . س د

اور س د = ا س جم (۱۸۰° − س) = − ا س جم س

اسواسطے طس^2 = طا^2 + طب^2 − ۲ طا طب جم س

پس دونو صورتون مین جم س = (طا^2 + طب^2 − طس^2) / ۲ طا طب

اور سوا اسکے اگر س قائمہ ہو تو طا^2 + طب^2 = طس^2 اور جم س صفر ہے پس اس سے معلوم ہوا کہ جو صورت قانونی جم س کے واسطے ثابت ہوئی ہے وہ ہر حالت مین خواہ زاویہ س کچھہ ہی ہو صحیح اور درست ہے

اور علی ہذا القیاس جم ا = (طب^2 + طس^2 − طا^2) / ۲ طب طس اور جم ب = (طس^2 + طا^2 − طب^2) / ۲ طس طا

(۲۱۶) ہر مثلث مین ہر ایک ضلع برابر ہے اون دو حاصل ضربون کے مجموعہ کے جو باقی دو ضلعون مین سے ہر ایک ضلع کو اوس زاویہ کے جیب التمام مین کہ وہ دوسرے ضلع کے

ساتھہ بناتا ہے ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہین

دفعہ ۲۱۴ مین بائین طرف کی شکل مین ہمکو یہہ حاصل ہے کہ

ب س = ب د + د س = اب جم ب + اس جم س

یعنی طا = طس جم ب + طب جم س

اور دفعہ ۲۱۴ مین دائین طرف کی شکل مین ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ب س = ب د - د س = اب جم ب - اس جم (۱۸۰° - س)

= اب جم ب + اس جم س

یعنی طا = طس جم ب + طب جم س

اور اسیطرح سے ہر ایک صورت مین یہہ حاصل ہوگا کہ

طب = طا جم س + طس جم ا

اور طس = طب جم ا + طا جم ب

(۲۱۷) مثلث کے نصف زاویہ کی جیب اور جیب التمام اور مماس کو اضلاع کی رقمون مین بیان کرو

بموجب دفعہ ۲۱۵ کے

جم ا = (طب^۲ + طس^۲ - طا^۲) / ۲ طب طس

اسیواسطے ۱ - جم ا = (۲ طب طس - طب^۲ - طس^۲ + طا^۲) / ۲ طب طس = (طا^۲ - (طب - طس)^۲) / ۲ طب طس

اسیواسطے جب^۲ ا/۲ = ((طا + طب - طس) (طا + طس - طب)) / ۴ طب طس

فرض کرو کہ ۲ م = طا + طب + طس یعنی م نصف مجموعہ اضلاع مثلث کا ہے تو

طا + طب - طس = طا + طب + طس - ۲ طس = ۲ (م - طس)

اور طا + طس - طب = طا + طب + طس - ۲ طب = ۲ (م - طب)

اسیواسطے جب^۲ ا/۲ = ((م - طب) (م - طس)) / طب طس

اور $\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\dfrac{(\text{م} - \text{طب})(\text{م} - \text{طس})}{\text{طب}\ \text{طس}}}$

اور نیز $1 + \text{جم ا} = 1 + \dfrac{\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{2\ \text{طب}\ \text{طس}} = \dfrac{(\text{طب} + \text{طس})^2 - \text{طا}^2}{2\ \text{طب}\ \text{طس}}$

اسیواسطے $\text{جم}^2\ \tfrac{1}{2}\text{ا} = \dfrac{(\text{طا} + \text{طب} + \text{طس})(\text{طب} + \text{طس} - \text{طا})}{4\ \text{طب}\ \text{طس}} = \dfrac{\text{م}(\text{م} - \text{طا})}{\text{طب}\ \text{طس}}$

اور $\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\dfrac{\text{م}(\text{م} - \text{طا})}{\text{طب}\ \text{طس}}}$

اور جب $\tfrac{1}{2}$ا اور جم $\tfrac{1}{2}$ا کی قیمتون کو ہم مستنبط کرسکتے ہین

$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\dfrac{(\text{م} - \text{طب})(\text{م} - \text{طس})}{\text{م}(\text{م} - \text{طا})}}$

جذر پر علامت مثبت لکہنی چاہیئے اسواسطے کہ $\tfrac{1}{2}$ا بہ نسبت قائمہ چہوٹا ہے اسیواسطے اسکی جیب اور جیب التمام اور مماس سب کے سب مثبت ہین

اور اسی قبیل کے جملے اور نصف زاویون کے واسطے نکلینگے

(۲۱۸) چونکہ جب ا = ۲ جب $\tfrac{1}{2}$ا جم $\tfrac{1}{2}$ا تو اسے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$\text{جب ا} = 2\sqrt{\dfrac{(\text{م} - \text{طب})(\text{م} - \text{طس})}{\text{طب}\ \text{طس}}} \cdot \sqrt{\dfrac{\text{م}(\text{م} - \text{طا})}{\text{طب}\ \text{طس}}}$

$= \dfrac{2}{\text{طب}\ \text{طس}}\sqrt{\text{م}(\text{م} - \text{طا})(\text{م} - \text{طب})(\text{م} - \text{طس})}$

اور جب ا کی قیمت بلا واسطہ جم ا کے قیمت کے بہی ہم دریافت کرسکتے ہین

$\text{جب}^2\ \text{ا} = 1 - \dfrac{(\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2)^2}{4\ \text{طب}^2\ \text{طس}^2}$

$= \dfrac{2\ \text{طب}^2\ \text{طس}^2 + 2\ \text{طس}^2\ \text{طا}^2 + 2\ \text{طا}^2\ \text{طب}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4}{4\ \text{طب}^2\ \text{طس}^2}$

اسیواسطے $\text{جب ا} = \dfrac{\sqrt{2\ \text{طب}^2\ \text{طس}^2 + 2\ \text{طس}^2\ \text{طا}^2 + 2\ \text{طا}^2\ \text{طب}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4}}{2\ \text{طب}\ \text{طس}}$

اگر اس جملہ کو اجزاء ضربی م اور م − طا اور م − طب اور م − طس مین بانٹین تو اس جملہ کی پہلے جملہ کے ساتہہ تطبیق ہوجایگی

(۲۱۹) ہمنے دفعات ۲۱۴ – ۲۱۶ مین بعض شکلونکی امداد سے صور قانونیہ کو ثابت کیا ہے لیکن ہر دو دفعہ کے صور قانونیہ کو تیسری دفعہ کی صورت قانونی سے مستنبط کرنا نہایت آسان ہی اب دفعہ ۲۱۶ کے موافق یہہ لکھتے ہین کہ

$\text{طا} = \text{طب جم س} + \text{طس جم ب}$ اور $\text{طب} = \text{طس جم ا} + \text{طا جم س}$ اور $\text{طس} = \text{طا جم ب} + \text{طب جم ا}$

اول کو طا مین دوم کو طب مین اور سوم کو طس مین ضرب دو اور جو مساواتین حاصل ہون اونمین سے اول دو کو جمع کرو اور تیسری مساوات کو تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{طا}^2 + \text{طب}^2 - \text{طس}^2 = ۲\ \text{طا طب جم س}$$

اور اسیطرح دفعہ ۲۱۵ کی دو صورت قانونی مستنبط ہو سکتی ہین اور ثابت کرین

اب ان نتایج سے آگے عمل اوسیطرح کرین جسطرح کہ دفعات ۲۱۷ اور ۲۱۸ مین کیا تھا

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{طا}} = \frac{۲}{\text{طا طب طس}}\sqrt{\text{م}\ (\text{م} - \text{طا})\ (\text{م} - \text{طب})\ (\text{م} - \text{طس})}$$

اور $\frac{\text{جب ب}}{\text{طب}}$ اور $\frac{\text{جب س}}{\text{طس}}$ بھی اسی جملہ کے برابر ہین

$$\text{پس}\ \frac{\text{جب ا}}{\text{طا}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{طب}} = \frac{\text{جب س}}{\text{طس}}$$

یا دفعہ ۲۱۴ کے صورت قانونی اول قائم کرین اور پھر شکل سے اسیطرح عمل کرین کہ

$$\text{جب ا} = \text{جب}\ (۱۸۰^\circ - \text{ا}) = \text{جب}\ (\text{ب} + \text{س}) = \text{جب ب جم س} + \text{جم ب جب س}$$

$$\text{اسواسطے}\ ۱ = \text{جم س}\ \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ا}} + \text{جم ب}\ \frac{\text{جب س}}{\text{جب ا}}$$

$$= \frac{\text{طب}}{\text{طا}}\ \text{جم س} + \frac{\text{طس}}{\text{طا}}\ \text{جم ب}$$

$$\text{اسواسطے طا} = \text{طب جم س} + \text{طس جم ب}$$

اور علی ہذا القیاس دفعہ ۲۱۶ کے دو اور صور قانونی بھی مستنبط ہو سکتی ہین اور پھر اون سے دفعہ ۲۱۷ کی صور قانونیہ استخراج اوسیطرح ہو سکتی ہین جسطرح اس دفعہ کے اول مین لکھا ہے

(۲۲۰) جب $\frac{\text{ا}}{۲}$ اور جم $\frac{\text{ا}}{۲}$ کے اندر دفعہ ۲۱۷ مین جو علامت مشتبہ واقع ہوئی

اوسکی وجہ اوسیطرح بیان ہوسکتی ہی جس طرح پہلے اوسکا بیان اپنے موقع پر کیا گیا ہے اول ہم جملہ جم ا کے واسطے دریافت کرتے ہین اور پہر اون سے جب $\frac{ا}{۲}$ اور جم $\frac{ا}{۲}$ کے جملے استنباط کرتے ہین اور دفعہ ۹۶ مین ثابت ہوا ہے کہ ایسی حالت مین دو قیمتین نکلا کرتے ہین جنمین سواء علامت کے اختلاف مقادیر مطلوب مین نہین ہوتا

(۲۲۱) چونکہ دفعہ ۲۱۷ کے صور قانونیہ اچھی طرح ثابت ہوئین ہین اسلئے اون سے اصلی قیمت جب $\frac{ا}{۲}$ اور جم $\frac{ا}{۲}$ اور مس $\frac{ا}{۲}$ کی دریافت ہوتی ہے بشرطیکہ مثلث اصل مین موجود ہو اور یہہ بات مثلث کے ایک خواص سے آسانی دریافت ہوسکتی ہے

مثلاً صورت قانونی

$$جب \frac{ا}{۲} = \sqrt{\frac{(طا + طب - طس)(طا + طس - طب)}{۴ طب طس}}$$

اب جب $\frac{ا}{۲}$ کی ممکن قیمت ہونیکی ضرورہی کہ بائین طرف کا جملہ مثبت ہو اور واحد سے کم ہو اوسکا مثبت ہونا توظاہر ہے کہ مثلث کے دو ضلعے ملکر تیسرے ضلع سے بڑے ہوتے ہین اسواسطے طا + طب طس مثبت اور طا + طس − طب مثبت ہے اور شمارکنندہ $طا^۲ - (طس - طب)^۲$ نسنما سے کم ہے بشرطیکہ $طا^۲$ چہوٹا $(طس - طب)^۲ + ۴ طب طس$ یعنی $طا^۲$ چہوٹا $(طب + طس)^۲$ سے ہو اور یہہ ظاہر معلوم ہوتا ہے

امثلہ متفرقہ

(۱) ایک مثلث کے اضلاع $لا^۲ + لا + ۱$ اور $۲ لا + ۱$ اور $لا^۲ - ۱$ ہین تو ثابت کرو کہ اوسمین سب سے بڑا زاویہ ۱۲۰° کا ہے

(۲) اگر جم ب $= \frac{جب ا}{۲ جب س}$ تو ثابت کرو کہ مثلث متساوی الساقین ہے

(۳) مثلث قائم الزاویہ مین جسکا زاویہ س قائمہ ہو ثابت کرو کہ

$$جم^۲ \frac{ا}{۲} = \frac{طب + طس}{۲ طس}$$

(۴) اگر طا مس ا + طب مس ب = (طا + طب) مس $\frac{ا + ب}{۲}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{طا}{طب} = \frac{جم ا}{جم ب}$

(۵) ایک مثلث مستوی کے زاویے سلسلۂ ہندسیہ میں ہیں اور اونکی نسبت مشترک ۲ ہے تو ثابت کرو کہ بڑے ضلع کو مجموعۂ اضلاع سے وہ نسبت ہوگی جو ۲ جب $\frac{\pi}{14}$ کو واحد سے نسبت ہے

(۶) اگر زاویے خارجی ایک مثلث کے اَ اور بَ اور سَ ہوں تو ثابت کرو کہ

۲ طب طس جع اَ + ۲ طس طا جع بَ + ۲ طا طب جع سَ = (طا + طب + طس)^2 دف

(۷) اگر مثلث ا ب س کے کسی زاویہ ا سے عمود اذ قاعدہ پر نکالیں اور د سے عمود دی اور دف اب اور اس پر نکالیں تو ثابت کرو کہ

ای . ی ب جم^2 س = اف . ف س . جم^2 ب

(۸) اگر طا اور طب اور طس اضلاع مثلث کے ہوں اور مقابل کے زاویے اونکے ۲ بر اور ۳ بر اور ۴ بر ہوں تو ثابت کرو کہ س ۲ بر = $\left(\frac{طب}{طا + طس}\right)^2 - 1$

(۹) مثلث ا ب س کا زاویہ س منفرجہ ہے تو ثابت کرو کہ س ا س ب بہ نسبت واحد کے کم ہے

(۱۰) اگر اضلاع مثلث کے طا و طب و طس سلسلۂ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

جم $\frac{ا - س}{۲}$ = ۲ جب $\frac{ب}{۲}$ اور طا جم^2 $\frac{س}{۲}$ + طس جم^2 $\frac{ا}{۲}$ = $\frac{۳ طب}{۲}$

(۱۱) اگر مثلث کے ضلع ب س کا نقطۂ وسط د ہو تو

ہم ب ا د − ہم ب = ۲ ہم ا

(۱۲) اگر مثلث کا ایک زاویہ ایسے دو حصوں میں تقسیم کیا جائے کہ اوسکی جیبوں میں وہ نسبت ہو جو اوسکے اضلاع متصلہ میں نسبت ہے تو ثابت کرو کہ اونکے مماس التماموں کا تفاوت برابر اون زاویوں کے مماس التماموں کے تفاوت کے ہوگا جو مقابل اون اضلاع کے واقع ہیں

(۱۳) اگر مثلث کے زاویوں کے مماس التمام سلسلۂ حسابیہ میں ہوں تو مجذور اضلاع کے بھی سلسلۂ حسابیہ میں ہونگے

(۱۴) مثلث کا زاویہ راس اور نسبت قاعدہ اور ارتفاع کے معلوم ہیں اور زاویہ راس عمود سے جو راس سے قاعدہ پر نکالا جائے دو حصوں میں تقسیم ہوتا ہے تو ان حصوں کے

مماس دریافت کرو

(۱۵) اگر مثلث کا قاعدہ تین برابر حصون مین تقسیم کیا جاے اور ط۱ اور ط۲ اور ط۳ مماس اون زاویونکے ہون جو محاذی ان حصون کے زاویہ راس پر واقع ہون تو

$$\left(\frac{1}{ط_1}+\frac{1}{ط_2}\right)\left(\frac{1}{ط_2}+\frac{1}{ط_3}\right) = ۴\left(۱+\frac{1}{ط_2^{2}}\right)$$

(۱۶) اگر مثلث کے زاویون کے جیبین سلسلہ حسابیہ مین ہون تو سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی زاویونکی نصف نصف زاویون کے مماسون کا مجموعہ $\frac{۱}{۳}$ ہوگا

(۱۷) اگر ایک مثلث کا ضلع ب س نقطہ د پر تنصیف ہو اور ا د کہینچا جاے تو ثابت کرو

$$\text{مس ا د ب} = \frac{۲\ \text{ظب ظس جب ا}}{\text{ظب} \sim \text{ظس}}$$

(۱۸) اگر ایک مثلث کے زاویے ا اور ب اور س اور جم $\frac{ا}{۲}$ اور جم $\frac{ب}{۲}$ اور جم $\frac{س}{۲}$ سلسلہ حسابیہ مین ہون تو ثابت کرو کہ مم $\frac{ا}{۲}$ مم $\frac{س}{۲}$ = ۳

(۱۹) ایک مثلث کے زوایا ا اور ب سے خطوط مستقیم کہیچے گئے ہین اور وہ اونکو ایسے حصون پر تقسیم کرتے ہین کہ اونکی جیبون مین نسبت ا اور ن کی ہی اور یہہ خطوط نقطہ د پر تقاطع کرتے ہین تو ثابت کرو کہ د س زاویہ س کی تنصیف کریگا یا اوسکو ایسے حصون مین تقسیم کریگا کہ جنکی جیبون مین وہ نسبت ہوگی جو ا کو ن سے

(۲۰) مثلث کے زاویہ ا کو جو خط تنصیف کرتا ہی اور قاعدہ پر ختم ہوتا ہی اوسکا طول اگر ل ہو اور زاویہ بر وہ قاعدہ کے ساتھہ بنائے تو ثابت کرو کہ مثلث کا مجموعۂ اضلاع

$$= \frac{۲\text{ل جم}\frac{ا}{۲}\ \text{جب بر}}{\text{جب بر} \sim \text{جب}\frac{ا}{۲}}$$

(۲۱) اگر مثلث کا سب سے بڑا زاویہ بر اور سب سے چھوٹا زاویہ سر ہو اور اوسکے اضلاع سلسلہ حسابیہ مین ہون تو ثابت کرو کہ

$$۴\,(۱-\text{جم بر})\,(۱-\text{جم سر}) = \text{جم بر} + \text{جم سر}$$

(۲۲) مثلث ا ب س کے کونون سے خطوط اضلاع تک ایسے کہینچی گئی ہین کہ وہ ایک ہی زاویہ

اضلاع کے ساتھہ ایک ہی جانب مین بالترتیب بناتے ہین تو ثابت کرو کہ ان خطوط سے ایک مثلث متشابہ پہلے مثلث کا بنے گا اور ان دونو مثلثون کے امتداد طولانی مین وہ نسبت ہوگی جو جم س - جب س (جم ا + جم ب + جم س) کو نسبت ا سے ہے

۲۳ سے ۳۷ تک جو مثالین لکھی ہین اونکو ثابت کرو کہ مثلث مین یہہ ارتباطات ہوتی ہین

(۲۳) طا (طب جم س - طس جم ب) = طب² - طس²

(۲۴) طا (جم ب جم س + جم ا) = طب (جم ا جم س + جم ب)
= طس (جم ا جم ب + جم س)

(۲۵) (طب + طس - طا) مس ا/۲ = (طس + طا - طب) مس ب/۲ = (طا + طب - طس) مس س/۲

(۲۶) طب جم ب + طس جم س = طا جم (ب - س)

(۲۷) (طا + طب) جم س + (طب + طس) جم ا + (طس + طا) جم ب = طا + طب + طس

(۲۸) (طا² - طب²) مم س + (طب² - طس²) مم ا + (طس² - طا²) مم ب = ۰

(۲۹) (طا - طب) جم س/۲ + (طس - طا) مم ب/۲ + (طب - طس) مم ا/۲ = ۰

(۳۰) ا - مس ا/۲ مس ب/۲ = ۲طس / (طا + طب + طس)

(۳۱) (طا + طب + طس) (جم ا + جم ب + جم س)
= ۲طا جم² ا/۲ + ۲طب جم² ب/۲ + ۲طس جم² س/۲

(۳۲) جب² ا / طا² = جم ا جم ب / طا طب + جم ا جم س / طا طس + جم ب جم س / طب طس

(۳۳) طا جم ا + طب جم ب + طس جم س = ۲طا جب ب جب س

(۳۴) جم ا + جم ب + جم س = ۱ + ۲طا جب ب جب س / (طا + طب + طس)

(۳۵) طا² - ۲طا طب جم (۶۰° + س) = طس² - ۲طا طس جم (۶۰° + ا)

(۳۶) مم ا/۲ - قم ا/۲ : مم ب/۲ + مم س/۲ :: طب + طس - طا : ۲طا

(۳۷) جم² ا/۲ جم² ب/۲ جم² س/۲ = ۴مح (مح - جم² ا/۲) (مح - جم² ب/۲) (مح - جم² س/۲)

اسمین ۲ مح = جم ا/۲ + جم ب/۲ + جم س/۲

(۳۸) مجموعہ اضلاع مثلث کا نصف جم ا/۲ جم ب/۲ قط (ا+ب)/۲ ہے

(۳۹) اگر د جب^۲ ا + لا جب^۲ ب = ی جب^۲ ب + د جب^۲ س = لا جب^۲ س + ی جب^۲ ا

تو لا : د : ی :: جب ۲ ا : جب ۲ ب : جب ۲ س

(۴۰) ۸ جب ا/۲ جب ب/۲ جب س/۲ ہر صورت مین چہوٹا اسے ہی لیکن ا = ب = س کی صورت مستثنی ہے

چودہوان باب

مثلثون کا حل

(۲۴۲) مثلث کے چہہ اصلی جز ہوتے ہین تین ضلعے تین زاویے اونکو اجزاء ترکیبی مثلث کے کہتے ہین
مثلثون کا حل کرنا عبارت اسے ہی کہ جب ان چہہ اجزاء ترکیبی مین سے کافی اجزاء ترکیبی معلوم ہون
تو ان سے حساب کرکے باقی اجزاء ترکیبی کو دریافت کرین تحریر ذیل سے یہہ بات ظاہر ہوجائیگی
کہ جب ان چہہ اجزاء ترکیبی مین سے تین معلوم ہون تو باقی تین اجزاء ترکیبی ہر حالت مین معلوم
ہوجائینگی مگر اوس صورت مین کہ تین زاویے معلوم ہون تو فقط اضلاع کی نسبت باہمی
معلوم ہوگی مگر وہ خود اضلاع نہین معلوم ہونگی ہمکو صور قانونیہ مین لوکارثم کے داخل کرنیکی ضرورت
پڑیگی اور موافق سابق کے لوکارثم کی جگہہ اختصاراً لوک کا لفظ لکہینگے اور اوسے لوکارثم موافق
اساس عشری کے سمجہینگے اور جسبی علم مثلثی جملے کے اول حرف لا کا لکہینگے تو اوسی لوکارثم
جدولی اوس جملہ کے اوس حالت مین جانینگے کہ لوکارثم موافق اساس ۱۰ کے لی جاوی اور ۱۰ زیادہ کیا جاوی

اب ہم مثلثون کا حل مثلث قائم الزاویہ سے شروع کرتے ہین اور اوسمین زاویہ س قائمہ فرض کرتے ہین

(۲۴۳) وتر اور ایک حادہ زاویہ مثلث قائم الزاویہ کا معلوم ہی اوسکو حل کرو

فرض کرو کہ وتر ا اور زاویہ ا معلوم ہی تو

ب = ۹۰ - ا

طا/طس = جب ا اسیواسطے طا = طس جب ا

اسیواسطے لوک طا = لوک طس + لوک جب ا = لوک طس + ل جب ا − ۱۰

طب/طس = جب ب اسیواسطے طب = طس جب ب

اسیواسطے لوک طب = لوک طس + لوک جب ب = لوک طس + ل جب ب − ۱۰

پس ب اور طا اور طب معلوم ہو گئی

(۲۲۴) وتر اور ایک ضلع مثلث قائم الزاویہ کا معلوم ہے اوسکو حل کرو

فرض کرو کہ طس اور طا معلوم ہین تو

جب ا = طا/طس لوک جب ا = لوک طا − لوک طس

اسیواسطے ل جب ا = ۱۰ + لوک طا − لوک طس

اسے ا دریافت ہوگا اور اوسے ب = ۹۰° − ا کے معلوم ہوگا

اور طس² = طا² + طب² اسیواسطے طب² = طس² − طا² = (طس − طا) (طس + طا)

اسیواسطے طب = √((طس − طا) (طس + طا))

لوک طب = ½ لوک (طس − طا) + ½ لوک (طس + طا)

اور طب کو اس صورت قانونی طب = طس جم ا سے دریافت کرو

(۲۲۵) ضلع اور ایک زاویہ حادہ مثلث قائم الزاویہ کا معلوم ہے مثلث کو حل کرو

فرضکرو کہ طا اور ا معلوم ہین تو

ب = ۹۰ − ا

اور طا/طس = جب ا اسیواسطے طس = طا/جب ا

لوک طس = لوک طا − لوک جب ا = لوک طا − ل جب ا + ۱۰

طا/طب = مس ا اسیواسطے طب = طا/مس ا

لوک طب = لوک طا − لوک مس ا = لوک طا − ل مس ا + ۱۰

پس $\hat{ب}$ اور طس اور طب دریافت ہو گئی

اگر طا اور ب معلوم ہون تو ا = ۹۰° ـ ب کے ہوگا پس ا دریافت ہوگیا اور اون سے ہم طس اور طب کو موافق سابق کے دریافت کرسکتے ہین

(۲۲۶) دو ضلعے مثلث قائم الزاویہ کے معلوم ہین مثلث کو حل کرو

یہان طا اور طب معلوم ہین تو

مس ا = $\frac{\text{طا}}{\text{طب}}$ اسیواسطے لوک مس ا = لوک طا ـ لوک طب

اسیواسطے ل مس ا = ۱۰ + لوک طا ـ لوک طب

ب = ۹۰° ـ ا

$\frac{\text{طا}}{\text{طس}}$ = جب ا اسیواسطے طس = $\frac{\text{طا}}{\text{جب ا}}$

اسیواسطے لوک طس = لوک طا ـ ل جب ا + ۱۰

اور طس کو اس صورت قانونی طس = $\sqrt{(\text{طا}^2 + \text{طب}^2)}$ سے دریافت کرسکتے ہین مگر اسکا حساب لوکارتھم سے نہین ہوسکتا

(۲۲۷) جب جب التمام اور جیب معکوس اور مماس اور مماس التمام اور قاطع الزاویہ مین سے ایک کے معلوم ہونے سے جب زاویہ مثلث کا معلوم ہوتا ہی تو اوسمین کچھ اشتباہ کی جگہ نہین رہتی کیونکہ ۱۸۰° سے کم جتنے زاوئے ہین اونکے جملون کی ایک ہی قیمت ہوتی ہی مگر جیب اور قاطع التمام سے جو ایک زاویہ مثلث کا دریافت ہوتا ہی تو اوسمین اشتباہ رہتا ہی کیونکہ ۱۸۰° سے چھوٹے زاوئے دو ایسے ہوسکتے ہین کہ ایک ہی جیب معلوم یا قاطع التمام معلوم رکھتے ہین مگر مثلث قائم الزاویہ کی حالت مین کوئی محل اشتباہ کا نہین رہتا کیونکہ زاوئے مثلث کے سوا قائمہ کے حادی ہوتے ہین

اب مثلث غیر قائم الزاویہ کا حل لکھتے ہین

(۲۲۸) دو زاوئے اور ایک ضلع مثلث کا معلوم ہے مثلث کو حل کرو

فرض کرو کہ ا اور س معلوم زاوئے ہین اور طب ضلع معلوم ہے

لو ب = ۱۸۰° - ا - س

$\frac{طا}{طب} = \frac{جب ا}{جب ب}$ اسیواسطے طا = $\frac{طب جب ا}{جب ب}$

اسیواسطے لوک طا = لوک طب + لوک جب ا - لوک جب ب = لوک طب + ل جب ا - ل جب ب

اور علی ہذا القیاس لوک طس = لوک طب + ل جب س - ل جب ب

پس ب اور طا اور طس دریافت ہوگئی

اگر زاویئے ا اور ب معلوم ہون تو

س = ۱۸۰° - ا - ب

اب عمل موافق سابق کے طس اور طا کے دریافت کرنے کے لئے کرو

(۲۲۹) دو ضلعے معلوم ہین اور زاویہ درمیانی اونکا معلوم ہے مثلث کو حل کرو

طب اور طس اضلاع معلوم ہین اور ا زاویہ درمیانی اونکا معلوم ہے

معلوم ہے کہ $\frac{جب ب}{جب س} = \frac{طب}{طس}$

اسیواسطے $\frac{جب ب - جب س}{جب ب + جب س} = \frac{طب - طس}{طب + طس}$

اسیواسطے $\frac{مس \frac{1}{2} (ب - س)}{مس \frac{1}{2} (ب + س)} = \frac{طب - طس}{طب + طس}$ بموجب دفعہ ۸۸ کے

اور مس $\frac{1}{2}$ (ب + س) = مس $\frac{1}{2}$ (۱۸۰° - ا) = مم $\frac{ا}{2}$

اسیواسطے مس $\frac{1}{2}$ (ب - س) = $\frac{طب - طس}{طب + طس}$ مم $\frac{ا}{2}$

اسیواسطے لوک مس $\frac{1}{2}$ (ب - س) = لوک (طب - طس) - لوک (طب + طس) + لوک مم $\frac{ا}{2}$

اس صورت سے $\frac{1}{2}$ (ب - س) دریافت ہوتا ہی اور $\frac{1}{2}$ (ب + س) پہلے سے اس سبب سے معلوم ہے کہ وہ برابر ۹۰° - $\frac{ا}{2}$ کے ہے پس ب اور س معلوم ہوگئی

اور نیز $\frac{طا}{طس} = \frac{جب ا}{جب س}$ اسے طا بھی دریافت ہو سکتا ہے

(۲۳۰) ابھی جو جملہ لکھا ہے اوسے طا کے دریافت کرنے مین تین لوکارثمون کے دریافت کرنے کی ضرورت پڑی یعنی طس اور جب ا اور جب س کی ترکیب ذیل مین ہمکو صرف دو ہی لوکارثم

دریافت کرانی پڑتی ہین

ہمکو معلوم ہے کہ $\frac{\text{ط}_{\text{ا}}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ط}_{\text{ب}}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{ط}_{\text{س}}}{\text{جب س}}$

اسیواسطے $\frac{\text{ط}_{\text{ا}}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ط}_{\text{ب}} + \text{ط}_{\text{س}}}{\text{جب ب} + \text{جب س}}$

اور جب ب + جب س = ۲ جب ½ (ب + س) جم ½ (ب − س) بموجب دفعہ ۱۳۳

$= \text{۲ جم } \tfrac{\text{ا}}{\text{۲}} \text{ جم } \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}} (\text{ب} - \text{س})$

اسیواسطے $\text{ط}_{\text{ا}} = \frac{(\text{ط}_{\text{ب}} + \text{ط}_{\text{س}}) \text{ جب ا}}{\text{۲ جم } \frac{\text{ا}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{۱}}{\text{۲}} (\text{ب} - \text{س})} = \frac{(\text{ط}_{\text{ب}} + \text{ط}_{\text{س}}) \text{ جب } \frac{\text{ا}}{\text{۲}}}{\text{جم } \frac{\text{۱}}{\text{۲}} (\text{ب} - \text{س})}$

لوکارثم ط ب + ط س کی تو حل کے پہلی جزو مین استعمال مین آئی ہے اب ہمکو صرف دو نئی لوکارثمین یعنی جب ½ا اور جم ½ (ب − س) کی دریافت کرنی پڑیگی

(۲۴۱) دفعہ گذشتہ مین مقادیر معلوم سے پہلے اسے کہ ہم باقی دو زاویئے دریافت کرین تیسرے ضلع کو دریافت کر سکتے ہین اسواسطے کہ بموجب دفعہ ۲۱۵ کے

$\text{ط}_{\text{ا}}^{۲} = \text{ط}_{\text{ب}}^{۲} + \text{ط}_{\text{س}}^{۲} - \text{۲ ط}_{\text{ب}} \text{ط}_{\text{س}} \text{ جم ا}$

اور ہم اس کی صورت کو ایسی صورت کی طرف تحویل کرتے ہین کہ وہ لوکارثمی حساب کے قابل ہو

$\text{ط}_{\text{ا}}^{۲} = \text{ط}_{\text{ب}}^{۲} + \text{ط}_{\text{س}}^{۲} - \text{۲ ط}_{\text{ب}} \text{ط}_{\text{س}} \left(\text{۲ جم}^{۲} \tfrac{\text{ا}}{\text{۲}} - \text{۱}\right)$

$= (\text{ط}_{\text{ب}} + \text{ط}_{\text{س}})^{۲} - \text{۴ ط}_{\text{ب}} \text{ط}_{\text{س}} \text{ جم}^{۲} \tfrac{\text{ا}}{\text{۲}}$

$= (\text{ط}_{\text{ب}} + \text{ط}_{\text{س}})^{۲} \left[\text{۱} - \frac{\text{۴ ط}_{\text{ب}} \text{ط}_{\text{س}}}{(\text{ط}_{\text{ب}} + \text{ط}_{\text{س}})^{۲}} \text{ جم}^{۲} \tfrac{\text{ا}}{\text{۲}}\right]$

اب ہم ایک زاویہ بر ایسا دریافت کرتے ہین کہ

$\text{جب}^{۲} \text{ بر} = \frac{\text{۴ ط}_{\text{ب}} \text{ط}_{\text{س}}}{(\text{ط}_{\text{ب}} + \text{ط}_{\text{س}})^{۲}} \text{ جم}^{۲} \tfrac{\text{ا}}{\text{۲}}$

پس $\text{ط}_{\text{ا}}^{۲} = (\text{ط}_{\text{ب}} + \text{ط}_{\text{س}})^{۲} (\text{۱} - \text{جب}^{۲} \text{ بر}) = (\text{ط}_{\text{ب}} + \text{ط}_{\text{س}})^{۲} \text{ جم}^{۲} \text{ بر}$

اسیواسطے $\text{ط}_{\text{ا}} = (\text{ط}_{\text{ب}} + \text{ط}_{\text{س}}) \text{ جم بر}$

اسیواسطے $\text{لوک ط}_{\text{ا}} = \text{لوک} (\text{ط}_{\text{ب}} + \text{ط}_{\text{س}}) + \text{لوک جم بر} = \text{لوک} (\text{ط}_{\text{ب}} + \text{ط}_{\text{س}}) + \text{ل جم بر} - \text{۱۰}$

پس ط ا دریافت ہوگیا

جب کسی زاویہ کو اسطرح کسی جملہ مین داخل کرتے ہین کہ اوسے وہ جملہ اجزاء ضربی مین تحلیل ہوجاے تو اوس زاویہ کو اکثر زاویہ مستعان کہتے ہین تحقیقات مذکور مین بر زاویہ مستعان ہے ہمکو یہ تحقیق معلوم تہا کہ ایک ایسا زاویہ ضرور ہوگا جسکی جیب کا مربع برابر جملہ معلوم کے ہو کیونکہ جملہ مثبت ہے اور واحد سے اس سبب سے کم ہے کہ ۴ طب طس ہی بڑا $(طا + طب)^2$ سے نہین ہوسکتا اور $جم^2 \frac{1}{2} ا$ چھوٹی بہ نسبت واحد کے ہی اور مساوات کی لوکارثم لینے سے اسطرح دریافت ہوتا ہے کہ

$$۲ \,لوک\, جیب\, بر = لوک\, ۴ + لوک\, طب + لوک\, طس - ۲\, لوک\, (طب + طس) + ۲\, لوک\, جم \frac{1}{2} ا$$

اسیواسطے

$$۲\, ل\, جیب\, بر = ۲\, لوک\, ۲ + لوک\, طب + لوک\, طس - ۲\, لوک\, (طب + طس) + ۲\, ل\, جم \frac{1}{2} ا$$

(۲۳۲) جب کہ لوکارثم طب اور طس کی معلوم ہوتی ہین تو بعض اوقات دفعہ ۲۲۹ کا عمل زاویہ مستعان کے اعانت سے آسان ہوجاتا ہے

ہمکو معلوم ہے کہ $مس \frac{1}{2} (ب - س) = \frac{طب - طس}{طب + طس}\, مم \frac{1}{2} ا$

اب فرض کرو کہ $\frac{طب}{طس} = مس\, بر$ اسیواسطے

$$\frac{طب - طس}{طب + طس} = \frac{مس\, بر - 1}{مس\, بر + 1} = مس\, (بر - \frac{\pi}{4})$$

پس $مس \frac{1}{2} (ب - س) = مس\, (بر - \frac{\pi}{4})\, مم \frac{1}{2} ا$

یا اسطرح کہ فرض کرو طس چہوٹا طب سے ہو تو $طس = طب\, جم\, سر$

اسیواسطے $\frac{طب - طس}{طب + طس} = \frac{1 - جم\, سر}{1 + جم\, سر} = مس^2 \frac{سر}{2}$

پس $مس \frac{1}{2} (ب - س) = مس^2 \frac{سر}{2}\, مم \frac{1}{2} ا$

مثلث کو حل کرو

(۲۳۳) دو ضلعے معلوم ہین اور انہین سے ایک ضلع کے مقابل کا زاویہ معلوم ہے

فرض کرو کہ طا اور طب اضلاع معلوم ہین اور ا زاویہ معلوم ہے

پس $\frac{جیب\, ب}{جیب\, ا} = \frac{طب}{طا}$ اسیواسطے $جیب\, ب = \frac{طب}{طا}\, جیب\, ا$

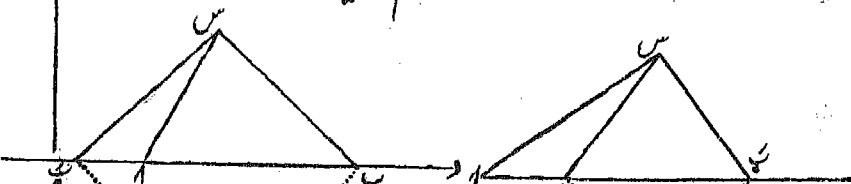
اب اگر (طب جب ا)/(طا) چھوٹا بہ نسبت واحد کے ہو تو دو مختلف زاویئے چھوٹے ۱۸۰° سے دریافت ہونگے جنمین سے ہر ایک کی جیب (طب جب ا)/(طا) ہو گی اور انمین سے ہر ایک قائمہ سے چھوٹا اور دوسرا بڑا ہوگا اگر طا بڑا طب سے ہو تو ا بڑا ب سے ہوگا اسواسطے ب زاویہ حادہ ہوگا اسلیئے چھوٹی قیمت ب کی دخل حل مین رکھتی ہے اور جب یہ تحقیق ہو گیا تو س اوسے دریافت ہو سکتا ہے کیونکہ وہ برابر ۱۸۰° − ا − ب کے ہے اور پھر طس اس صورت سے دریافت ہوگا کہ

(طس)/(طا) = (جب س)/(جب ا)

پس اگر ب کی دو قیمتین حل مین داخل ہو سکتی ہین تو اونکے مطابق دو قیمتین س اور طس کی دریافت ہونگی پس اجزاء معلوم سے دو مثلث دریافت ہونگی

اگر (طب جب ا)/(طا) = ا تو ب زاویہ قائمہ ہوگا تو اجزاء معلوم سے صرف ایک زاویہ دریافت ہوگا اور اگر (طب جب ا)/(طا) بڑا واحد سے ہو تو کوئی مثلث ایسا نہین ہو سکتا کہ وہ اجزاء معلوم رکھتا ہو

پس جب دو ضلعے معلوم ہون اور اونمین سے ایک ضلع کا متقابل زاویہ معلوم ہو تو اکثر دو مثلث اجزاء معلوم سے دریافت ہونگے مثلثون کے حل مین اس صورت کو صورت مشتبہ کہتے ہین ہمنے یہہ لکھا کہ اکثر دو مثلث دریافت ہونگی یہہ اکثر کی قید اسواسطے ہے کہ کچھہ ضرور نہین کہ ہمیشہ دو ہی مثلث دریافت ہوا کرین بعض صورتین مستثنی ہین ایک صورت مستثنی یہہ ہے کہ مثلث قائم الزاویہ ہو تو صرف ایک ہی مثلث دریافت ہوگا صورت دوم یہہ ہے کہ مثلث کا بنا ہی ناممکن ہو

(۲۴۳) شکلون سے صورت مشتبہ کی توضیح اور تشریح کرتے ہین

فرض کرو کہ س ا د زاویہ معلوم ا ہے اور اس ضلع معلوم طب ہے اور س کے مرکز اور طا کے برابر نصف قطر پر ایک دائرہ کھینچو س سے جو عمود ا د پر نکالا جائیگا برابر طب جب ا کے ہوگا اسواسطے

اگر طا بڑا طب جب ا سے ہو تو دائرہ ا د سے دو نقطون ب اور ب پر ملیگا اور اگر طا چھوٹا طب سے ہو تو ب اور ب ایک ہی جانب مین ا کے ہوگا جیسا کہ اول شکل مین کہچا ہوا ہے تو دو مثلث یعنی ا ب س اور ا ب س حاصل ہونگے جنکے اجزاء معلوم طا اور طب اور ا ہونگے اور اگر طا بڑا طب سے ہو تو ب اور ب مخالف جانبون مین ا کے واقع ہونگے جیسا کہ دوسری شکل مین کہچا ہوا ہے تو صرف ایک مثلث س ا ب حاصل ہوگا جسکے اجزاء معلوم طا اور طب اور ا ہونگے مثلث س ا ب کا زاویہ س ا ب کا ۱۸۰° - ا بجای ا کے ہے اور اگر طا برابر طب جب ا کے ہو تو دائرہ خط ا د کو مس کریگا اور دو نقطے ب اور ب اول شکل مین ایک دوسرے پر منطبق ہو جائینگے پس ایک مثلث حاصل ہوگا جسکا زاویہ ب قائمہ ہوگا

اگر طا چھوٹا طب جب ا سے ہو تو دائرہ خط ا د سے نہین ملاقی ہوگا اور مثلث جسکے اجزاء معلوم طا اور طب اور ا ہون معدوم ہوگا

(۲۳۵) دفعہ ۲۳۳ مین زاویہ ب کا اول دریافت کیا تھا اور بعد ازان ضلع طس کا معلوم کیا تھا اب ہم ایک اور طرح سے حل لکھتے ہین اور اول طس کو دریافت کرتے ہین

طا² = طب² + طس² − ۲ طب طس جم ا

اسواسطے طس² − ۲ طب طس جم ا + طب² − طا² = ۰

اس مساوات درجہ دوم کے حل کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

طس = طب جم ا ± √(طا² − طب² جب² ا)

اب طس کی جو قیمتین دریافت ہوئی ہین ان پر بحث کرتے ہین

اگر طا چھوٹا طب جب ا سے ہو تو قیمتین طس کی ناممکن ہین اور مثلث اجزاء معلوم رکھنے والا معدوم ہوگا اگر طا برابر طب جب ا کے ہو تو طس = طب جم ا اگر ا زاویہ حادہ ہو تو طس مثبت ہوگا اور اجزاء معلوم سے ایک مثلث بنیگا اور اگر ا زاویہ منفرجہ ہو تو طس منفی ہوگا اور اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مثلث ناممکن ہے اور نفس الامر مین طا چھوٹا طب

کیونکہ وہ برابر طب جب ا کے ہی اور اسلیئے کسی اصلی مثلث مین ا زاویہ منفرجہ نہین ہو سکتا
اگر طا بڑا طب جب ا سے ہو تو دو قیمتین طس کے نکلینگے اور یہہ دونو مثبت ہونگین اگر ا زاویہ حادہ ہو
اور طب جم ا بڑا بہ نسبت $\sqrt{}$ (طا² - طب² جب² ا) کے ہوتا ہے تو اس اخر شرط سے یہہ نتیجہ نکلتا ہے
کہ طب² جم² ا بڑا بہ نسبت طا² - طب² جب² ا کے ہو یعنی طب² بڑا بہ نسبت طا² کے ہو
اسے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ا زاویہ حادہ ہو اور طا بڑا طب جب ا سے اور چہوٹا طب سے ہو تو
دو مثلث دریافت ہونگے

(۲۳۶) تینون ضلعے معلوم ہین مثلث کو حل کرو
فرض کرو کہ م نصف مجموعہ اضلاع کو تعبیر کرتا ہی تو بموجب دفعہ ۲۱۷ کے

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{(\text{م}-\text{طب})(\text{م}-\text{طس})}{\text{طب طس}}} \quad \text{اور جم}\ \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{\text{م}(\text{م}-\text{طا})}{\text{طب طس}}}$$

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{(\text{م}-\text{طب})(\text{م}-\text{طس})}{\text{م}(\text{م}-\text{طا})}}$$

اور اسی قبیل کی اور صور قانونیہ بہی نصف زاویون کے واسطے ہین
نصف زاویون کے مماسون کے واسطے جو صور قانونیہ ہین وہ سب سے زیادہ حساب لوکارثمی کے واسطے
مناسب ہین کیونکہ اونمین لوکارثم صرف م اور م - طا اور م - طب اور م - طس کی تمام
زاویون کے دریافت کرنیکے واسطے معلوم کرنی پڑتی ہین برخلاف اسکے اگر اور صور قانونیہ کا استعمال
کرین تو اونمین اور زیادہ لوکارثمین اضلاع کی بہی دریافت کرنی پڑتی ہے

(۲۳۷) اگر مثلث کے تمام اضلاع معلوم ہون تو مثلث کو دو قائم الزاویہ مثلثون مین تقسیم کرکے ہم
زاویے دریافت کرسکتے ہین
دفعہ ۲۱۴ کے بائین طرف کی شکل مین

$$\text{اد}^2 = \text{اب}^2 - \text{ب د}^2 \quad \text{اور نیز} = \text{اس}^2 - \text{س د}^2$$

$$\text{اسیواسطے}\quad \text{اب}^2 - \text{اس}^2 = \text{ب د}^2 - \text{س د}^2$$

$$\text{اسیواسطے}\quad (\text{اب} + \text{اس})(\text{اب} - \text{اس}) = (\text{ب د} + \text{س د})(\text{ب د} - \text{س د})$$

اسے ہم ب د – س د دریافت کر سکتے ہین اور چونکہ ب د + س د معلوم ہے
اس سبب سے ب د اور س د معلوم ہو سکتی ہین تو

$$\text{جم ب} = \frac{\text{ب د}}{\text{ا ب}} \quad \text{اور} \quad \text{جم س} = \frac{\text{س د}}{\text{ا س}}$$

اسے ب اور س دریافت ہونگے

اور دفعہ ۲۱۴ کے دائین طرف کی شکل مین موافق سابق کے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(\text{ا ب} + \text{ا س})(\text{ا ب} - \text{ا س}) = (\text{ب د} + \text{س د})(\text{ب د} - \text{س د})$$

اسے ب د + س د معلوم ہو سکتا ہے اور ب د – س د پہلی ہی سے معلوم ہین تو ب د اور س د
معلوم ہونگے اور

$$\text{جم ب} = \frac{\text{ب د}}{\text{ا ب}} \quad \text{اور} \quad \text{جم}\,(۱۸۰^\circ - \text{س}) = \frac{\text{س د}}{\text{ا س}}$$

اسے ب اور س معلوم ہو سکتی ہین

(۲۳۸) بارہوین باب مین ہمنے ثابت کیا ہے کہ علم مثلثی جملون کے جدولون کا ہمیشہ فایدہ کے ساتھہ
استعمال نہین ہو سکتا اسے ہمکو یہہ ہدایت ہوتی ہے کہ جب مثلثون کے حل کی ایک سے زیادہ ترکیبین
ہون تو اونمین سے ایک ترکیب کو اختیار کرنا چاہیئے اور بعض صورتون مین اوس حل کی بھی ترمیم
کرنی چاہیئے مثلاً فرض کرو کہ مساوات جب ا = ن سے ا کا دریافت کرنا منظور ہے جسمین
ن تقریباً برابر واحد کے ہو اس مساوات سے ا کا دریافت کرنا ایک وقت کی بات ہے کیونکہ
جب زاویے قائمہ کے قریب قریب ہون تو متصل کے جیبون کا تفاوت قابل لحاظ کے
نہین ہوتا مگر یہہ ہمکو معلوم ہے کہ

$$\text{جب}\left(۴۵^\circ - \frac{\text{ا}}{۲}\right) = \sqrt{\frac{۱ - \text{جم}\,(۹۰^\circ - \text{ا})}{۲}} = \sqrt{\frac{۱ - \text{جب ا}}{۲}} = \sqrt{\frac{۱ - \text{ن}}{۲}}$$

اس صورت قانونی پر کچھہ اعتراض نہین ہو سکتا
اور علی ہذا القیاس اگر ہم کو اس مساوات

سے ا کا دریافت کرنا منظور ہو جسمین کہ ن تقریباً برابر واحد کے ہی تو ہم اس مساوات کو (جم ا = ن) اس صورت مین تبدیل کر لین اوسے بڑا فایدہ ہوگا کہ

جب ا/۲ = √((۱ − جم ا)/۲) = √((۱ − ن)/۲)

یا اسطرح (۱ − جم ا)/(۱ + جم ا) = (۱ − ن)/(۱ + ن)

اسیواسطے مس ا/۲ = √((۱ − ن)/(۱ + ن))

مثالین

(۱) معلوم ہے کہ ب = ۳۲٫۵ اور طا = ۵ اور طب = ۲٫۵ تو زاویہ ا کی قیمتین دریافت کرو

(۲) ایک مثلث کا ضلع دوسرے ضلع سے نصف ہی اور اونکا درمیانی زاویہ ۶۰° ہی اور زاویونکو دریافت کرو

(۳) ایک مثلث کے اضلاع مین نسبتین ۲ : √۶ : ۱ + √۳ ہین زاویونکو دریافت کرو

(۴) اگر ا = ۳۰ اور طب = ۱۰۰ اور طا = ۴۰ اسمین کوئی صورت مشتبہ ہی

(۵) معلوم ہے کہ ا = ۸° اور طا = ۴ اور طب = ۴ + √۸۰ مثلث کو حل کرو

(۶) معلوم ہے کہ ا = ۵° اور طا = ۴ اور طب = ۴ + √۴۸ مثلث کو حل کرو

(۷) اگر طا اور طب اور ا معلوم ہین اور طا چھوٹا طب سے ہے اور اگر طس اور طس' دو قیمتین مثلث کے تیسرے ضلع کی ہون تو

طس² − ۲ طس طس' جم ۲ا + طس'² = ۴ طا² جم² ا

(۸) صورت مشتبہ مین جو مثلث شرائط سوال کو ایفا کرتی ہین اونکے رقبون کا مجموعہ دریافت کرو

(۹) اگر ب۱ اور س۱ اور ب۲ اور س۲ زاویے دو مثلثون کے ہون تو صورت مشتبہ مین

حب س۱/حب ب۱ + حب س۲/حب ب۲ = ۲ جم ا

(۱۰) صورت مشتبہ مین مثلثون مین سے ایک مثلث کا رقبہ ن گنا دوسرے مثلث کے رقبہ سے ہی تو ثابت کرو کہ اگر طب بڑا ضلع اور طا چھوٹا ضلع اضلاع معلوم مین سے ہون

(۲۵) مثلث قائم الزاویہ مین وتر طس = ۵۳ ۶۹ اور طب = ۳ با کو دریافت کرو اور ہے معلوم

لوک ۵٫۷۴۳ = ۰٫۷۵۹۰۴۸ اور لوک ۶۹٫۵۳ = ۱٫۸۴۲۱۷۲۲

ل جب ۴۴° ۵۹′ ۵۰″ = ۹٫۸۴۸۳۹۰۲ تفاوت اً کے واسطے = ۰٫۰۰۰۰۲۱

(۲۶) دو ضلعے ۸۰ اور ۱۰۰ فیٹ ہین اور زاویہ درمیانی اونکا ۶۰° ہے اور زاویے دریافت کرو اور معلوم ہے

لوک ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲ ل مس ۱۰° ۵۳′ ۳۶″ = ۹٫۲۸۴۳۲ ۰ کرو

(۲۷) دو ضلعے مثلث کے ۳ اور ۵ فیٹ ہین اور زاویہ درمیانی اونکا ۱۲۰° ہے اور زاویے دریافت کرو

اور معلوم ہے کہ لوک ۸ ۴ = ۰٫۶۸۱۲۴۱۲

ل مس ۸° ۱۲′ = ۹٫۱۵۸۶۷۰۶ تفاوت ۶۰″ کے واسطے = ۰٫۰۰۸۹۴۰

(۲۸) ایک منیار کا قاعدہ مربع ہے اور اوسکا ضلع ۲۰۰ فیٹ ہے اور ہر ایک کنارہ ۱۵۰ فیٹ ہے تو ہر ایک طرف کا ڈہلان دریافت کرو اور یہہ معلوم ہے کہ

لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳ ل مس ۲۶° ۳۳′ = ۹٫۶۹۸۶۸

ل مس ۲۶° ۳۴′ = ۹٫۶۹۹۰۰

(۲۹) معلوم ہے کہ $\frac{\text{طا}}{\text{طب}}$ = ۲٫۰ س = ۶۰° لوک ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲۱۳ ل مم ۴۹° ۶′ = ۹٫۷۶۱۸۷۹۷ ... تفاوت ۱′ کے واسطے = ۰٫۰۰۰۷۵۱۴ اور زاویے دریافت کرو

(۳۰) اگر طا = ۲ طس = ۳ ل جب ا = ۹٫۵۲۲۸۷۸۷ س کو دریافت کرو اور لوک ۳ برابر ۰٫۴۷۷۱۲۱۳ کے ہے

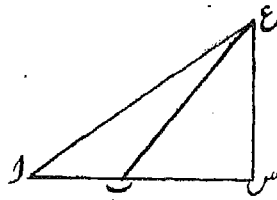
(۳۱) مثلث کا قاعدہ اور ارتفاع اور تفاوت فوق القاعدہ کے زاویون کا معلوم ہے تو بتلاؤ مثلث کو کس طرح حل کرین

(۳۲) مثلث کے زاویون سے جو عمود مقابل کے ضلعون پر نکالے جائین وہ معلوم ہین تو بتلاؤ کہ مثلث کس طرح حل کرین

پندرہوان باب

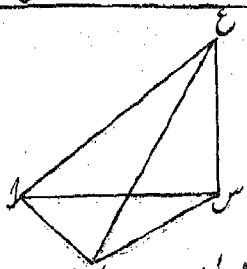
ارتفاع اور فاصلون کی پیمایش

(۲۳۹) اب بعض مثالین لکھتے ہین جنسے یہہ معلوم ہوگا کہ باب گزشتہ کے بعض قانون عملیات مین کس کام آتے ہین ہمنے اس بات کو تسلیم کرلیا ہے کہ بوساطت بعض آلات کے وہ زاویہ ہم مشاہدہ کرسکتے ہین جو ہماری آنکھہ پر محاذی اوس خط کے بنے کہ جو دو شیئون کے درمیان ملایا جاے اور یہہ دونون شئے ہمکو دکھائی دیتی ہین اگر آلات کا حال مفصل دیکھنا ہو تو ایسی کتابون مین دیکھو جو سروینگ کی کتابین آلات کے باب مین لکھی گئی ہین

۲۴۰ سطح افقی پر ارتفاع اور فاصلہ ایک شئے کا دریافت کرو جس تک ہم جا نہین سکتے

فرضکرو کہ ع اوس شئے کا سرا ہے اوسکا ارتفاع ع س دریافت کرو اور س پر سے ایک سطح افقی گذرتی ہے اوسمین نقطہ ا ہے اوسسے فاصلہ اوس شئے کا دریافت کرو ا پر زاویہ ع ا س مشاہدہ کرو اور کوئی طول ا ب سیدہ مین اوس شئے کی پیمایش کرو اور ب پر زاویہ ع ب س مشاہدہ کرو اب مثلث ع ا ب مین ضلع ا ب معلوم ہے اور زاویہ ع ا ب معلوم ہے اور ع ب ا اس سبب سے معلوم ہے کہ وہ تکملہ ع ب س کا ہے اسواسطے ا ع بھی معلوم ہو سکتا ہے

تو ع س = ا ع جب ع ا س اور ا س = ا ع جم ع ا س پس اسسے ارتفاع ع س اور فاصلہ ا س دریافت ہو گیا

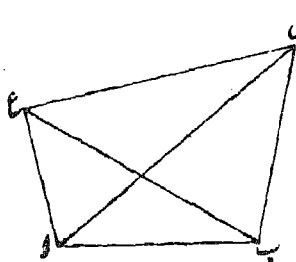
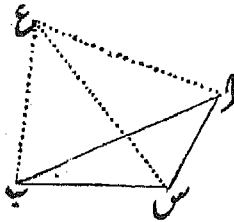
ا ب کا سیدہ مین اوس شئے کا ناپنا آسان نہین ہے اسلئے عمل اسطرح کرنا چاہئے کہ ا ب کو کسی سمت مین اسے ناپ لو اور ا پر زاویئے ع ا س اور ع ا ب اور ب پر زاویہ ع ب ا

ع
ا س
ب

مشاہدہ کئے تو مثلث ا ع ب مین ضلع ا ب اور زاوئے ع ا ب اور ع ب ا معلوم ہین اسواسطے ا ع دریافت ہو سکتا ہے
تو موافق سابق کے ع س = ا ع جب ع ا س اور ا س = ا ع جم ع ا س

(۲۴۱) دو چیزین دکہائی دیتی ہین مگر وہان تک ہم پہونچ نہین سکتے اونکے درمیان فاصلہ دریافت کرنا

فرض کرو کہ ع اور ق دو چیزین ہین اور ا اور ب دو مقام ہین جہان ہم جا سکتے ہین اور وہان سے دونو چیزین دکہائی بہی دیتی ہین ا پر زاوئے ع ا ق اور ق ا ب مشاہدہ کرو اور اگر ا و ب و ع و ق ایک ہی سطح مین ہون تو زاویہ ع ا ب کو مشاہدہ کرو اور ب پر زاویہ ع ب ا اور ق ب ا مشاہدہ کرو اور ا ب کو ناپو تو مثلث ا ب ع مین ضلع ا ب اور زاوئے ع ا ب اور ع ب ا معلوم ہین تو ع ا دریافت ہو سکتا ہی اور پہر مثلث ا ب ق مین ضلع ا ب اور زاوئے ق ا ب اور ق ب ا معلوم ہین

ق
ع
ا ب

پس ا ق معلوم ہو سکتا ہی اور پہر مثلث ع ا ق مین اضلاع ا ع اور ا ق اور زاویہ ع ا ق معلوم ہین تو ع ق معلوم ہو سکتا ہے

(۲۴۳) تین نقاط ا اور ب اور س مین جو خطوط وصل ہون اونکے طول معلوم ہین اور کسی نقطہ ع سے جو اوس سطح مین جسمین ا و ب و س ہین زاویے ا ع س اور ب ع س مشاہدہ کئے اب مطلوب یہہ ہے کہ ع کا فاصلہ ہر ایک نقطہ ا و ب و س سے دریافت کرین

زاویہ ا ع س کو سہ سے اور ب ع س کو صہ سے اور ع ا س کو لا سے اور زاویہ ع ب س کو ی سے تعبیر کرو تو سہ اور صہ معلوم ہین اور جب لا اور ی معلوم ہو جائین تو فاصلے مطلوبہ ع ا اور ع ب اور ع س بھی دریافت ہو سکتے ہین کیونکہ ہر ایک مثلث ع ا س اور ع ب س مین دو زاویئے اور ایک ضلع معلوم ہو جائیگا اب ہم یہہ بتلاتے ہین کہ لا اور ی کس طرح دریافت ہوتے ہین چونکہ ذو اربعۃ الاضلاع ع ا س ب کے چارون زاویے ملکر برابر چار قائمون کی ہوتے ہین تو لا + ی = ۲ ک − سہ − صہ − س

پس اسے مجموعہ لا اور ی کا معلوم ہوگیا

اور مثلث ا س ع سے یہہ ہمکو حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع س} = \frac{\text{ا س جب ع ا س}}{\text{جب ا ع س}} = \frac{\text{طب جب لا}}{\text{جب سہ}}$$

اور مثلث ب س ع سے ہمکو یہہ معلوم ہوتا ہے

$$\text{ع س} = \frac{\text{ب س جب ع ب س}}{\text{جب ب ع س}} = \frac{\text{طا جب ی}}{\text{جب صہ}}$$

$$\text{اسیواسطے}\quad \frac{\text{طب جب لا}}{\text{جب سہ}} = \frac{\text{طا جب ی}}{\text{جب صہ}}$$

$$\text{اسیواسطے}\quad \frac{\text{جب لا}}{\text{جب ی}} = \frac{\text{طا جب سہ}}{\text{طب جب صہ}}$$

اب فرض کرو کہ $\frac{\text{طا جب سہ}}{\text{طب جب صہ}} = \text{مس سر}$ تو مس سر کی قیمت علم مثلثی جدولون سے معلوم ہو سکتی ہے

پس حب لا / حب ی = مس ہہ

اسیواسطے حب لا − حب ی / حب لا + حب ی = مس ہہ − ۱ / مس ہہ + ۱ = مس (ہہ − ۴۵)

اسیواسطے بموجب دفعہ ۸۰ مس ½ (لا − ی) / مس ½ (لا + ی) = مس (ہہ − ۴۵)

اس اخر مساوات سے لا − ی دریافت کر سکتے ہین اور پہلے لکھ آئے ہین کہ لا + ی ہمکو معلوم ہے تو لا اور ی دریافت ہو جائینگے

(۲۴۳) مثلثون کے حل مین بعض اجزا معلوم ہوتے ہین اور بعض اجزا مطلوب ہوتے ہین جب اجزا معلوم مین کچھہ غلطی واقع ہو تو اس غلطی کے سبب سے اجزا مطلوب مین جو غلطی واقع ہو اوسکی مقدار کا دریافت کرنا بعض اوقات ایک بڑی بات ہوا کرتی ہے اس قبیل کے سوالات علم جزئیات سے بخوبی حل ہوتے ہین مگر یہان ہم دو ایک مثالین لکھتے ہین جو اس علم مثلث سے ہی طالب علم کی سمجھہ مین آ سکتے ہین

(۲۴۴) فرض کرو کہ ارتفاع کسی عمارت کا اسطرح دریافت ہو کہ اوسکے قاعدہ سے خط افقی پیمائش کیا ہے اور اس خط کی طرف پر سر عمارت کا زاویہ ارتفاعی افق کے اوپر مشاہدہ کیا ہے اگر چھوٹی سی غلطی اس زاویہ کے مشاہدہ کرنے مین واقع ہو تو بتاؤ عمارت کے ارتفاع مین جسکا تخمینہ ہم کر چکے ہین کسقدر غلطی واقع ہوگی

فرض کرو کہ جو خط ناپا گیا ہے اوسکا طول ط ہے اور زاویہ مشاہدہ کیا گیا بر ہے اور عمارت کا ارتفاع تخمینہ کیا گیا لا ہے

تو لا = ط مس بر

فرض کرو کہ بر + ھہ صحیح زاویہ ہے اور لا + کر صحیح ارتفاع ہے

تو لا + کر = ط مس (بر + ھہ)

اور تفریق کرنے سے کر = ط [مس (بر + ھہ) − مس بر] = ط حب ھہ / جم (بر + ھہ) جم بر

اگر ھہ چھوٹی ہو تو ھہ حب ھہ کی جگہہ ھہ شمار کنندہ مین اور جم بر کو بجاے جم (بر + ھہ) کے نسب نما مین لکھہ سکتے ہین تو

$$ک = \frac{ط \text{ دھ}}{جم ۲ بر} \text{ تقریباً}$$

پس اسے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ زاویہ مین غلطی ہونے سے ارتفاع مین کسقدر غلطی واقع ہوتی ہے

نسبت غلطی کی ارتفاع سے جسکا تخمینہ ہمنے کیا ہے

$$= \frac{ط \text{ دھ}}{جم ۲ بر} \div ط س بر = \frac{\text{دھ}}{جب بر جم بر} = \frac{۲ \text{ دھ}}{جب ۲ بر}$$

اور جس وقت جب ۲ بر کی نہایت بڑی قیمت ہو یعنی ۲ بر = $\frac{\pi}{2}$ تو یہہ نسبت نہایت چھوٹی ہوگی موافق قیمت معلوم دھ کے ہوگی

(۲۴۵) ایک مثلث اجزاء معلوم ا د ط ب اور ط س سے حل ہوا ہے اگر چھوٹی سی غلطی ا مین ہوگئی تو اس سبب سے تا ؤ ب مین کیا غلطی ہوگی

اب ہمکو ب اور مقادیر معلوم کو مربوط کرنیوالی صورت یہہ معلوم ہے کہ

$$جب ب = \frac{طب}{طس} جب س = \frac{طب}{طس} جب (ا + ب) \quad \ldots \quad (۱)$$

اب فرض کرو کہ جو غلطی ا کے تخمینہ کرنیمین واقع ہوا وسکا مقیاس قوسی دھ ہے اور اس غلطی کے سبب سے جو غلطی ب کے تخمینہ کرنیمین واقع ہوا وسکا مقیاس قوسی ک ہے تو بجاے (۱) کے صحیح صورت قانونی یہہ ہوئی

$$جب (ب + ک) = \frac{طب}{طس} جب (ا + ب + \text{دھ} + ک) \quad (۲)$$

اور تفریق کرنے سے جب (ب + ک) = $\frac{طب}{طس}$ جب (ا + ب + دھ + ک) − جب (ا + ب)

اس مساوات سے بموجب دفعہ ۱۸۱ کے ہمکو یہہ تقریباً معلوم ہوگا کہ

$$ک جم ب = \frac{طب}{طس} (\text{دھ} + ک) جم (ا + ب) = \frac{طب}{طس} (\text{دھ} + ک) جم س$$

$$پس ک (جم ب + \frac{طب}{طس} جم س) = - \frac{طب}{طس} \text{دھ} جم س \text{ ہوا اسواسطے } ک (جم ب + \frac{جب ب}{جب س} جم س) = - \frac{\text{دھ} جب ب جم س}{جب س}$$

$$\text{اسواسطے } ک = - \frac{\text{دھ} جب ب جم س}{جب ا}$$

پس نسبت ک اور دھ کی معلوم ہو سکتی ہین

مثالین

(۱) میدان کوہ مین ایک مقام سے مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۶۰° کا دیکہا اور جب چوٹی کی طرف ایک سطح مائل پر جو ۳۰° کا زاویہ افق سے بناتی تہی چڑہے تو دوسری مقام س پر زاویہ س ا ک ۵۳۰° مشاہدہ کیا تو پہاڑ کی بلندی گزون مین دریافت کرو

(۲) پائین برج سے افقی قاعدہ ۱۰۰ گز کا پیمایش ہوا اور اوسکے انجام پر زاویہ ارتفاع برج کا ۳۰° مشاہدہ کیا گیا تو برج کی بلندی دریافت کرو

(۳) ایک مقام ا ٹہیک جنوب مین ایک برج کے تہا وہان سے زاویہ ارتفاع برج کا ۳۰° مشاہدہ ہوا اور ایک مقام ب ٹہیک مغرب مین ا کے ط فاصلہ پر اوسے تہا وہان زاویہ ارتفاع ۱۸° کا مشاہدہ ہوا تو ثابت کرو کہ ارتفاع برج کا

ط
―――――――
(۲ + ۲ ہ ۵)

(۴) سطح ہموار پر ایک برج تہا اور اوس برج پر ایک علم قائم تہا اس سطح ہموار پر ایک شخص دیکہتا ہے کہ اگر وہ پائین برج سے ط فیٹ کے فاصلہ پر ہو تو برج کی سر چی اور پہاڑ کی چوٹی ایک خط مین نظر آتی ہین اور ص فیٹ کے فاصلہ برج سے اوسکی انکہہ پر علم کے محاذی وہی زاویہ بنتا ہے جو پہلے بنا تہا اور سر علم اور چوٹی پہاڑ کی ایک خط مین نظر آتی ہے تو ثابت کرو کہ اگر سطح افقی پر ارتفاع برج کا مشاہدہ کرنیوالی کی آنکہہ پر ح فیٹ ہو تو ارتفاع پہاڑ کا سطح افقی پر $\frac{ط ص ح}{ح^۲ - ط^۲}$ فیٹ ہوگا

(۵) ایک آدمی یہہ چاہتا تہا کہ ایک شے کا فاصلہ جہان وہ نہین جا سکتا تہا دریافت کرے اوسنے سطح افقی پر تین مقام ایسے دریافت کئے کہ اونپر اوس شے کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ایک ہی بنتا تہا تو اوس فاصلہ کو کس طرح دریافت کرین

(۶) ایک شخص چاہتا تہا کہ تین اشیا ا اور ب اور س کے درمیان جہان وہ جا نہین سکتا تہا فاصلہ دریافت کرے وہ ا اور ب کی سیدہ پر کہڑا ہوا اور پہر اوس

سمت مین گیا جو اب کے ساتھہ زاویہ قائمہ بناتی ہیں اور اون مقامات کے فاصلون کو ناپا جہان اوسکو ا اور س اوسی ایک خط مین اور ب اور س ایک ہی خط مین نظر آئے جسمین وہ خود کہڑا تھا اور ان مقامات پر زاویے اضافی بہی مشاہدہ کرتا ہے تو ا اور ب اور س کے درمیان فاصلونکو سطح دریافت کرے

(۷) ایک دریا کے کنارہ پر دو بلیان اب اور س د فاصلہ اس = اب پر قائم ہوئین ہین اور ارتفاع س د کا ایسا ہے کہ اب اور س د کے محاذی برابر زاویے مقام ی پر بنتے ہین اور یہہ مقام ہی ٹہیک مقابل ا کے دوسرے کنارہ پر دریا کے ہے تو ثابت کرو کہ عرض دریا کا مجذور

$\frac{\text{اب}^2}{\text{س د} - \text{اب}}$ ہے اور ی پر برابر زاویے ا د اور ب س کے محاذی بنے ہین

(۸) ایک برج ص فیٹ بلند تہا اور اوسپر علم ط فیٹ بلند قائم تہا تو بتاؤ سطح افقی پر جو پائین برج مین گذرتی ہے کس مقام پر کہڑا ہو کہ برج اور علم کا زاویہ نظری ایک ہی ہو اور ارتفاع چشم صہ ہے

(۹) ایک برج سطح افقی پر قائم ہے اور شمال کی طرف جہکا ہوا ہے پائین برج سے جنوب کی سمت مین ط اور ص کے فاصلون پر زاویے ارتفاع برج کے سہ اور صہ ہین اب اگر زاویہ میلان برج کا بر اور ارتفاع عمودی صہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ب} = \frac{\text{ص} - \text{ط}}{\text{ص مم سہ} - \text{ط جم ب}} \quad \text{اور صہ} = \frac{\text{ص} - \text{ط}}{\text{جم صہ} - \text{جم سہ}}$$

(۱۰) ایک برج کی برجی پر ط فیٹ بلند ایک شے لگی ہوئی ہے اور پائین برج سے ص فیٹ کے فاصلہ پر اوسکے محاذی زاویہ بنتا ہے ارتفاع برج کا دریافت کرو

(۱۱) ایک دریا کے کنارہ پر ستون ۲۰۰ فیٹ بلند ہے اور اوسپر ایک بت ۳۰ فیٹ بلند بیٹہا ہے اور ستون کے پاس نیچے ایک شخص ۶ فیٹ قد کا کہڑا ہے اور دوسرے کنارہ پر ایک شخص کی آنکہ پر وہ بت اور یہہ شخص ایک ہی زاویہ نظری بناتے ہین تو عرض دریا کا دریافت کرو

(۱۲) ایک گلی کا عرض ۳۰ فیٹ ہے اور اوسکی ایک جانب مین ایک مکان کے محاذی مقابل کی جانب کی کہڑکی پر زاویہ قائمہ بنتا ہے اور مکان کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع افق سے ۶۰° کا ہے

تو بلندی مکان کی دریافت کرو

(۱۳) دو میناروں کی بلندیاں باہم برابر ہین اونکے قاعدون مین جو خط ملتا ہے اوسپر ایک شخص کھڑا ہوا پاس کی مینار کا زاویہ ارتفاع ۶۰° کا دیکھتا ہے اور پہر وہ شخص ۸۰ فیٹ اوس سمت مین گیا جو زاویہ ۳۰° کا بنائے اوس خط کے ساتھ بناتی ہے کہ میناروں کے قاعدون مین ملایا جاوے اور وہان اوسنے زاویہ ارتفاع اونکی ۴۵° اور ۳۰° مشاہدہ کئے تو اونکا ارتفاع اور باہمی فاصلہ دریافت کرو

(۱۴) ایک خط افقی ایک شے کے نیچے سے گذرتا ہے اوسپر تین مقامات ا اور ب اور س سے اوس شے کا مشاہدہ کیا زاویہ ارتفاع ب پر دو چند اور س پر سہ چند بہ نسبت اوس زاویہ کے بنتا ہے جو ا پر زاویہ ارتفاع بنتا ہے اور اب = ط اور ب س = ص تو ثابت کرو کہ ارتفاع اوس شے کا

$$\frac{ط}{۲ص}\sqrt{[(ط + ص)(۳ص - ط)]}$$ ہے

اور زاویہ ارتفاعی کا مماس $\frac{۱}{۲}$ ہو تو ثابت کرو کہ ۵ ط = ۱۳ ص

(۱۵) ایک برج عمود وار قائم ہے اور اوسکا قاعدہ اوسی سطح افقی مین ہے جسپر ایک آدمی مشاہدہ کرنیوالا کھڑا ہے اس آدمی نے مقام ا سے اوس برج کو شمال مین دیکھا اور زاویہ نظری ۵° کا نایا اور پہر یہہ شخص ۰۰ اگر صہ اور زاویہ نظری اوسکا ہمیشہ د ہی زاویہ رہا اور مقام برج کا شمال مشرق ہو گیا تو اوسکا ارتفاع اور فاصلہ ا سے دریافت کرو

(۱۶) ایک شخص سیدہی سڑک پر جاتا تہا اوسنے یہہ دیکہا کہ سب سے بڑا زاویہ جو دو اشیا کے محاذی بناتا تہا سہ تہا جس مقام پر یہہ روشنی دیکہتا تہا وہان سے ح فاصلہ طے کیا اور اب اوسکو یہہ دو اشیا ایک ہی سے نظر آنے لگین اور اونکی سمت مشترک کے ساتھ زاویہ صہ بناتی تہی تو ثابت کرو کہ اشیا کے درمیان فاصلہ

$$\frac{۲ح \ جب \ سہ \ جب \ صہ}{جم \ سہ + جم \ صہ}$$ ہے

(۱۷) ایک قلعہ جہاز مین سے سمت مشرق شمال مشرق دکہائی دیا اور جب جہاز ۱۲ میل مشرق کی طرف گیا تو وہ شمال مشرق کی سمت مین نظر آیا تو ثابت کرو کہ اول اور دوم

مشاہدہ کے مقام سے فاصلہ اس قلعہ کا ½(۱۶ + √۲۸۸) اور ½(۱۶ − √۲۸۸) میل تھا

(۱۸) شمال کیطرف ایک جہاز جاتا تھا اوسکو دو روشنی گھر ایک خط مین مغرب کی سمت مین نظر آئے اور ایک گھنٹہ چلنے کے بعد روشنی گھرون کے مقامات اضافی جنوب مغرب اور جنوب جنوب مغرب تھی اور فاصلہ روشنی گھرون مین ۸ میل تھا تو بتاؤ رفتار جہاز کی کیا ہے

(۱۹) ایک جہاز کا مستول سطح سمندر سے ۶۴ فیٹ بلند تھا اوسی چوٹی پر سے ایک روشنی گھر کی روشنی افق پر دکہائی دی اور جب جہاز ۳۰ منٹ روشنی گھر کی طرف سیدہا چلا تو جہاز کے تختہ پر جو ۱۶ فیٹ سطح سمندر سے اونچا تھا روشنی دکھائی دیتی تھی تو بتاؤ جہاز کی رفتار کیا تھی اور زمین کو ایسا کرہ فرض کرو کہ جسکا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو

(۲۰) ایک پہاڑ پر ایک شخص ایسے رستے سے چڑہا جو جڑ اور چوٹی کے درمیان کے سب راہون سے کم تھا اول اس رستہ کا میلان افق کے ساتھ سہ تھا اور بعد ازان یکایک زاویہ میلان بڑہ کر صہ ہوگیا اور پھر یہی میلان رہا اور جب وہ پہاڑ کی چوٹی پر پہونچا تو اوسکو بیرومیٹر سے دریافت ہوا کہ ن فیٹ بلند چڑہا ہے اور جس مقام سے وہ چڑہا تھا اوسکا زاویہ پستی ل تھا تو ثابت کرو کہ جس چڑہائی پر وہ چڑہا یہہ تھی

ن جم ((سہ + صہ)/۲ − ل)
―――――――――――
جم (صہ − سہ)/۲ جب لہ

(۲۱) اگر سطح افقی پر دو مقامون سے ایک شئے کے زاویئے ارتفاعی سہ اور سہَ مشاہدہ مین آئین اور ان دو مقامون کے درمیان جو ایک خط ملتا ہے اوس پر ایک تیسرا مقام ایسا لین کہ اوسکا فاصلہ ان مقامات سے ط اور طَ ہو اور وہان سے زاویہ ارتفاعی اوس شئے کا صہ ہو تو سطح افقی پر ارتفاع اوس شئے کا ثابت کرو کہ یہہ ہوگا

جب سہ جب سہَ جب صہ [ططَ (ط + طَ)]^½
―――――――――――
(ط جب۲ سہ (جب۲ صہ − جب۲ سہَ) + طَ جب۲ سہَ (جب۲ صہ − جب۲ سہ))^½

(۲۲) ایک پہاڑ دوسری پہاڑ کی آڑ مین کچہہ تھا اونکے سامنے ایک آدمی نے دیکھا کہ اونکی بلندیون کے زوایا ارتفاع سہ اور سہَ ہین اور جب وہ ج میل چلا تو پہلا پہاڑ بالکل چہپ گیا

اور چھوٹے پہاڑ کا زاویہ ارتفاع جو دوسرے میل کے پتھر سے دیکہا تو وہ صہ تہا دونو میناروں کی بلندیاں دریافت کرو

(۲۳) ایک برج کے گرد گول خندق ہے ایک خاص دن دوپہر کو دیکہا کہ ۸۰ فیٹ برجی خندق کے برجی کا سایہ پڑا تہا اور جب آفتاب ٹہیک مغرب میں اوسیدن آیا تو سایہ ۱۲۰ فیٹ پرے خندق کے کنارہ سے پڑا اور فاصلہ دونون سایون کے انجامون کے درمیان ۳۷۵ فیٹ تہا اور زاویہ ارتفاع برجی کا لب خندق کے ہر مقام پر ۴۵° ہے تو برج کی بلندی اور آفتاب کا ارتفاع دریافت کرو

(۲۴) سطح مایل پر ایک برج ہے اور اوسکے مقام ا پر ملتا ہے اور اوسی سطح کے مقام س پر اوسکے محاذی زاویہ سہ بنا ہے اور خط اس مین نقطہ د ایسا ہے کہ س د = اس اس نقطہ د پر برج کے محاذی زاویہ صہ بنتا ہے اگر برج اور اس کے درمیان زاویہ سر بنا ہو تو ثابت کرو کہ جم سر = ۲ مم سہ - مم صہ اور اگر اسیطرح مشاہدہ کسی اور خط اس د پر کرین تو یہہ دریافت ہوتا ہے مس سہ = مس صہ اور زاویہ س اس = لہ تو ثابت کرو کہ اگر سطح مائل کا زاویہ میلان ہو تو

جب ہہ جب لہ = جم سر

(۲۵) مثلث ا ب س مین معلوم ہے کہ ا = ۳۰° اور ط ب = ۳۰ ہ ۳۱ اور ط ا = ۳ مثلث کو حل کرو اور فرض کرو کہ زاویہ ا کے مشاہدہ کرنے مین ۲″ کی غلطی ہو تو زاویہ ب مین تقریباً کیا غلطی واقع ہوگی

(۲۶) ایک دریا کے مقابل کنارہ پر دو چیزون کے درمیان فاصلہ ح ہے اور دریا کے اس طرف کے کنارہ پر کوئی فاصلہ مساوی کہینچ لیا ہے اور اس فاصلہ کے اطراف پر زاویے محاذی ح کے سہ اور صہ بنتے ہین تو عرض دریا کا دریافت کرو

(۲۷) ایک پہاڑ بہت دور تہا اوسپر ایک مربع قلعہ بنا ہوا تہا ایک شخص کو یہہ منظور تہا کہ مین اس قلعہ کا عرض دریافت کرون وہ ایک کونے کے جنوب مین کہڑا تہا وہان اوسنے

مشاہدہ کیا کہ زاویہ نظری قلعہ کے ایک برج کا سہ تہا پہر یہہ شخص ٹہیک مغرب کو گیا اور جب اپنے پہلے مقام سے ا فیٹ پر پہونچا تو اوسی برج کا وہی زاویہ نظری نظر آیا اور جب ص فیٹ اور آگے بڑہا تو وہ دوسرے کونے کے جنوب مین پہونچ گیا تو ثابت کرو کہ عرض دریا کا

(ط + ص) قط سہ فیٹ ہے اسمین مس سہ = $\frac{ط مس سہ}{ط + ص}$

(۲۸) دو پہاڑون کے ا اور ا چوٹیان ہین اور ب س ایک سڑک افقی بنے ہوئی ہے پس اگر قریب کے پہاڑ کی چوٹی بعید کے پہاڑ کے چوٹی کو چہپاتی ہوئی سڑک کے کسی مقام پر معلوم ہوتی ہو تو ثابت کرو کہ جب سہ جب صہ = جب سہ جب صہ اسمین زاویہ ارتفاع ا کا سڑک کے کسی مقام ب پر ہے اور زاویہ ا ب س کا صہ ہی اور سہ اور صہ بہی اسی قبیل کی مقادیر چوٹی ا کے واسطے سڑک کے کسی مقام ت پر سے دکہائی دیتے ہین

(۲۹) ایک سطح افقی پر دو چیزین ا اور ب ہین اور نقطہ ع بہی اوسی سطح مین ہی جسپر ا ب کے محاذی زاویہ سہ دکہائی دیتا ہی اور مقام ع سے دو شخص اون سمتون مین چلے کہ زاوئیے قائمے ع ا اور ع ب کے ساتہہ بناتی تہین اور مقامات ق اور ر پر پہونچے ان مقامون مین سے ہر ایک مقام پر ا ب کے محاذی زاویہ سہ بنتا تہا اور ع ق اور ع ر کے فاصلے ط اور ص ہین طول ا ب کا دریافت کرو

(۳۰) مشاہدہ کرنیوالا اور تین چیزین ا اور ب اور س ایک ہی سطح مین ہین ا س = س ب اور ا س اور س ب زاویے قائمے ایک دوسرے کے ساتہہ بناتے ہین نقطہ د پر ا س اور س ب کے محاذی زاویے سہ اور صہ مشاہدہ مین ائی اب مشاہدہ کرنیوالا د سے د کے سمت مین جو زاوئیے قائمے س د کے ساتہہ بناتی ہے اور د ک = د کے چلا اور یہان اوسنے دیکہا کہ ا س اور س ب کے محاذی زاویے سہ او صہ بنتے ہین ا ب کا فاصلہ دریافت کرو

(۳۱) ایک شخص دریا کے کنارہ پر کہڑا ہوکر کیا دیکہتا ہے کہ سامنے کے کنارہ پر جو برج بنا ہوا ہے اوسکے محاذی زاویہ ۵۵° کا اوس خط افقی کے ساتہہ بنتا ہی جو اوسکی

آنکہہ سے لیجاتا ہے جب وہ ۳۰ فیٹ الٹا ہٹا تو اوسکو زاویہ محاذی برج کے ۴۸° کا نظر آیا تو عرض دریا کا دریافت کرو اور معلوم ہے کہ

ل جب ۷° = ۹٫۰۸۵۸۹ ل جب ۳۵° = ۹٫۷۵۸۵۹

ل جب ۴۸° = ۹٫۸۷۱۰۷ لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲

لوک ۱٫۰۴۹۴۳ = ٫۰۲۰۸۹

(۳۲) ایک برج سطح افقی پر قائم ہے اور وہ ۱۵۰ فیٹ بلند ہے اوسکا سایہ ۵۷ فیٹ لنبا پڑتا ہے آفتاب کا ارتفاع دریافت کرو اور معلوم ہے کہ

لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳ ل س ۳۶° ۴۳' = ۱۰٫۳۰۰۰۹۹۹۴

ل س ۴۳' ۲۷ = ۱۰٫۳۰۱۳۱۵۳

(۳۳) ایک نٹ ۱۰۰ فیٹ بلند برج پر ۱۹۶ فیٹ رسّہ کی مدد سے پہونچنا چاہتا تہا تو بتاؤ اگر وہ اس کام کو کرے تو رسّی کا کیا زاویہ میلان یعنی ڈہلان ہوگا اور یہہ ہمکو معلوم ہے کہ

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳ ل جب ۳۰° ۴' = ۹٫۷۰۰۷۶۱

لوک ۷ = ٫۸۴۵۱۰ ل جب ۳۰° ۴۱' = ۹٫۷۰۷۸۲

(۳۴) سطح افقی پر زاوئے میلان ۶۰° اور ۴۰° بناتی ہوئی دو پہاڑ ایک ہی مقام تک بلند ہوتے ہین اور اونچی پہاڑ پر ایک شے عمودوار قائم ہی اور پہاڑ کے قاعدہ سے ۴۴ فیٹ کے فاصلہ زاوئے ارتفاع اوس شے کے سر اور پاؤن کے ۴۰° اور ۶۰° کے بنے ہین تو ارتفاع اس شے کا دریافت کرو اور معلوم ہے کہ

ل س ۳۰° = ۹٫۵۶۱۰۶۵۹ ل جم ۴۰° = ۹٫۸۸۴۲۵۴۰

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰ ۱۸۱۹۳۳۰۴۷ = لوک ۳۱ ۲۹۶۴۰۰

(۳۵) ایک جہاز دوسرے جہاز کے متوازی چلتا تہا اور وہ پہلے جہاز کو شمال سے ۵ش د نظر آیا اور جب ایک گھنٹہ جہاز چلے اوسکا زاویہ ۵ش تہا اور بعد ازان ایک گہنٹہ کے پیچھے لگ

شمال سے تو بتاؤ جہاز کس سمت مین چلتے تھے

(۲۴۵) دفعہ ۲۴۳ مین جس سوال پر بحث ہوئی تھی اگر اوسمین

سہ + صہ + سں = کر تو سر = کہہ

اور معطیات سے سوال کا حل نہین ہو سکتا

سولہوان باب

شلثون کے خواص

(۲۴۶) اس باب مین متفرق مقدمات لکھی جائینگی اور اونمین سے اکثر شلثون کے خواص سے متعلق ہونگے

(۲۴۷) مثلث کے رقبے کے واسطے کوئی جملہ دریافت کرو

مثلث نصف اوس قائم الزاویہ سے ہوتا ہی جسکا قاعدہ اور ارتفاع برابر مثلث کے قاعدہ اور ارتفاع کے ہو پس اگر اب س مثلث ہو اور ا د عمود اسے مقابل کے ضلع پر نکالا جاوے تو دفعہ ۲۱۴ کی شکلون سے یہہ حاصل ہوگا کہ

رقبہ مثلث کا = $\frac{1}{2}$ ب س ۰ ا د

ا د = ا ب جب ب

اسواسطے رقبہ مثلث = $\frac{1}{2}$ طا طس جب ب (۱)

پس یہ ثابت ہوا کہ رقبہ مثلث کا برابر نصف حاصل ضرب دو ضلعون اور اونکی درمیانی زاویہ کے جیب کے ہوتا ہے

بموجب دفعہ ۱۸۱ کے جب ب = $\frac{2}{\text{طا طس}}\sqrt{\text{م (م – طا) (م – طب) (م – طس)}}$

(۱) مین قیمت جب ب کی مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

رقبہ مثلث کا = $\sqrt{\text{م (م – طا) (م – طب) (م – طس)}}$ (۲)

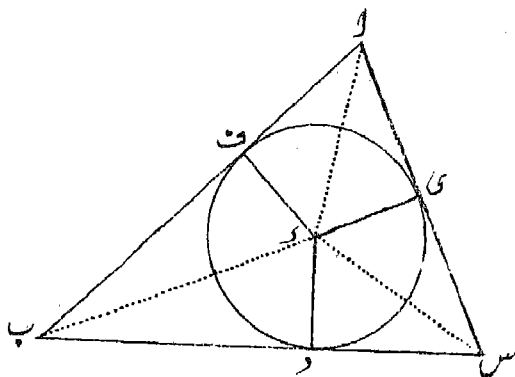
اگر سب اضلاع معلوم ہوتے تو مثلث کے رقبہ کے واسطے یہہ جملہ بہت خوب ہے اوسے بآسانی حساب مثلث کے رقبہ کا ہو جاتا ہے

بموجب دفعہ ۲۱۴ کے طا = $\frac{\text{طب جب ا}}{\text{جب ب}}$ اور طس = $\frac{\text{طب جب س}}{\text{جب ب}}$

ان قیمتوں کو (۱) میں رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

رقبہ مثلث کا = $\frac{\text{طب}^{۲}\ \text{جب ا جب س}}{\text{۲ جب ب}}$ (۳)

پس یہ رقبہ مثلث کا اوس حالت میں معلوم ہو جائیگا کہ دو زاویے معلوم ہوں اور ایک ضلع معلوم ہو اسواسطے کہ دو زاویوں کے معلوم ہونے سے تیسرا زاویہ معلوم ہو جائیگا

(۲۴۸) مثلث کے اندر جو دائرہ بنایا جاے اوسکا نصف قطر دریافت کرو

فرض کرو کہ ا ب س ایک مثلث ہے اور ء اوسکے دائرہ اندرونی کا مرکز ہو اور مثلث اضلاع کو نقاط د اور ی اور ف پر مس کرتا ہو اور دائرہ کا نصف قطر نق ہو تو

رقبہ مثلث ب ء س = $\frac{۱}{۲}$ ب س . ء د = $\frac{\text{طا نق}}{۲}$

رقبہ مثلث س ء ا = $\frac{۱}{۲}$ س ا . ء ی = $\frac{\text{طب نق}}{۲}$

رقبہ مثلث ا ء ب = $\frac{۱}{۲}$ ا ب . ء ف = $\frac{\text{طس نق}}{۲}$

اسواسطے جمع کرنے سے

(طا + طب + طس) $\frac{\text{نق}}{۲}$ = رقبہ مثلث ا ب س = ص دفعہ ۲۴۷

اسواسطے نق = $\frac{\text{ص}}{\text{م}}$

پس نصف قطر دائرہ اندرونی کا اسطرح حاصل ہوتا ہے کہ رقبہ مثلث کو نصف مجموعہ اضلاع پر تقسیم کریں چونکہ مثلث کے رقبے کے واسطے مختلف جملے ہوتے ہیں اسلیے نصف قطر کے

واسطے بہی مختلف سب جملے حاصل ہونگے

(۲۴۹) نق کی قیمت ایک اور صورت کی ہم دریافت کرتی ہین اور وہ اکثر کام مین آتی ہے

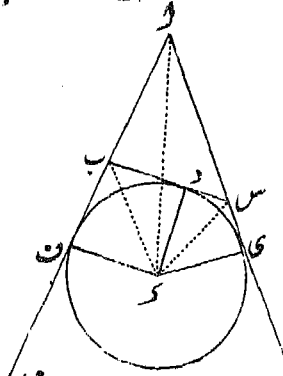
بحکم (ہ ش ۴ م) کے خطوط د ا اور د ب اور د س زاویون ا اور ب اور س کے تنصیف کرتے ہین پس

ب د = نق مم $\frac{ب}{۲}$ اور س د = نق مم $\frac{س}{۲}$

اسیواسطے نق (مم $\frac{ب}{۲}$ + مم $\frac{س}{۲}$) = طا

اسیواسطے نق جب $\frac{ب+س}{۲}$ = طا جب $\frac{ب}{۲}$ جب $\frac{س}{۲}$

اسیواسطے نق = $\frac{طا جب \frac{ب}{۲} جب \frac{س}{۲}}{جم \frac{ا}{۲}}$

(۲۵۰) مثلث کے ایک ضلع اور دو اضلاع ممدودہ کو جو دائرہ مس کرتا ہی اوسکا نصف قطر دریافت کرو

فرض کرو کہ ا ب س مثلث ہو اور د مرکز دائرہ کا ہو جو ضلع ب س اور اضلاع ممدودہ کو مس کرتا ہے اور دائرہ کا نصف قطر نق، ہے

ذو اربعۃ الاضلاع د ب ا س دو مثلثون د ا ب اور د ا س مین تقسیم ہوتی ہے اسیواسطے رقبہ اس ذو اربعۃ الاضلاع کا $\frac{طس}{۲}$ نق، + $\frac{طب}{۲}$ نق، ہے

اور پہر بہی ذو اربعۃ الاضلاع مثلثون د ب س اور ا ب س مین تقسیم ہو سکتی ہے اسیواسطے رقبہ اس ذو اربعۃ الاضلاع کا $\frac{طا}{۲}$ نق، + ص ہے پس

$\frac{طس}{۲}$ نق، + $\frac{طب}{۲}$ نق، = $\frac{طا}{۲}$ نق، + ص

اسیواسطے $نق_١ \frac{(طس + طب - طا)}{٢} = ص$

اسیواسطے $نق_١ = \frac{ص}{م - طا}$

اور علی ہذا القیاس $نق_٢$ نصف قطر اوس دائرہ کا ہو جو س ا کو اور باقی اضلاع ممدودہ کو مس کرتا ہے اور $نق_٣$ نصف قطر اوس دائرہ کا ہے جو اب کو اور اضلاع ممدودہ کو مس کرتا ہے

$نق_٢ = \frac{ص}{م - طب}$ اور $نق_٣ = \frac{ص}{م - طس}$

جو دائرہ مثلث کے ایک ضلع اور دو اضلاع ممدودہ کو مس کرتا ہے اوسکو دائرہ خارجی کہتے ہین

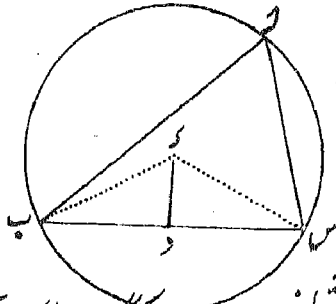
(۲۵۱) مثلث کے دائرہ اندرونی کا نصف قطر جس طرح دفعہ ۲۴۹ مین دریافت کیا تہا اوسیطرح سے نصف قطر دائرہ خارجی کا بہی دریافت ہو سکتا ہے

اسواسطے کہ شکل دفعہ ۲۵ مین خط رب تنصیف زاویہ کی کرتا ہی اور یہہ زاویہ تکملہ ب کا ہے اور خط رس تنصیف اوس زاویہ کی کرتا ہے جو تکملہ س کا ہے پس

$ب د = نق_١ مم (٩٠ - \frac{ب}{٢})$ اور $س د = نق_١ مم (٩٠ - \frac{س}{٢})$

اسیواسطے $نق_١ (مس \frac{ب}{٢} + مس \frac{س}{٢}) = طا$

اسیواسطے $نق_١ = \frac{طا جم \frac{ب}{٢} جم \frac{س}{٢}}{جب \frac{ب + س}{٢}} = \frac{طا جم \frac{ب}{٢} جم \frac{س}{٢}}{جم \frac{ا}{٢}}$

(۲۵۲) مثلث کے گرد جو دائرہ بنایا جاے اوسکا نصف قطر دریافت کرو

فرض کرو کہ ا ب س مثلث ہے اور اوسکے گرد جو دائرہ بنایا جاے اوسکا مرکز ر ہے ر د عمود ب س پر نکالو اور ب س کی تنصیف نقطہ د پر بحکم (ت ش ۳ م) کے کرو فرض کرو کہ نق نصف قطر دائرہ کو تعبیر کرتا ہے

تو زاویہ ب د س دو چند زاویہ ب ا س کے ہے اسیواسطے

$$\text{ب د د} = \text{ا}$$

$$\text{اور ب د} = \text{نَ جب ا} = \frac{\text{طا}}{۲}$$

$$\text{اسیواسطے نَ} = \frac{\text{طا}}{۲\,\text{جب ا}}$$

پس نَ ایک ضلع اور اوسکے مقابل کے زاویہ کی رقموں مین بیان ہوا۔

بموجب دفعہ ۲۱۸ کے $\text{جب ا} = \frac{۲\,\text{صل}}{\text{طب طس}}$ اسیواسطے

$$\text{نَ} = \frac{\text{طا طب طس}}{۴\,\text{صل}}$$

(۲۵۳) دفعات ۲۴۸ – ۲۵۲ مین بہت سے سائل دائرہ کے باب مین ثابت کرکے لکھے گئے۔ مثال کے طور پر اب ہم یہہ لکھتے ہین کہ مثلث کے دائرہ اندرونی اور بیرونی کے مرکزون مین کیا فاصلہ ہوگا۔ فرض کرو کہ دائرہ بیرونی کا مرکز د اور دائرہ اندرونی کا مرکز دَ ہے اور د اور دَ اور مثلث کی س کے کونہ مین خطوط ملائے گئے ہین تو

$$\text{د دَ}^۲ = \text{د س}^۲ + \text{دَ س}^۲ - ۲\,\text{د س . دَ س جم د س دَ}$$

اب زاویہ دَ س ب $= \frac{۱}{۲}$ س اور زاویہ د س ب $= ۹۰ - $ ا پس

$$\text{جم د س دَ} = \text{جم}\left(۹۰ - \text{ا} - \frac{\text{س}}{۲}\right)$$

$$= \text{جم}\left(\frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{س}}{۲} - \text{ا} - \frac{\text{س}}{۲}\right) = \text{جم}\,\frac{\text{ب} - \text{ا}}{۲}$$

$$\text{اور د س} = \text{نَ اور دَ س} = \frac{\text{نُ}}{\text{جب}\frac{\text{س}}{۲}}$$

$$\text{اسیواسطے د دَ}^۲ = \text{نَ}^۲ + \frac{\text{نُ}^۲}{\text{جب}^۲\frac{\text{س}}{۲}} - \frac{۲\,\text{نَ نُ}}{\text{جب}\frac{\text{س}}{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ب} - \text{ا}}{۲}$$

$$\text{بموجب دفعہ ۲۴۹ کے نُ} = \frac{\text{طا جب}\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\frac{\text{س}}{۲}}{\text{جم}\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$\text{بموجب دفعہ ۲۵۲ کے نَ} = \frac{\text{طا}}{۲\,\text{جب ا}}$$

$$\text{اسیواسطے}\ \frac{\text{نُ}}{\text{نَ}} = ۴\,\text{جب}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جب}\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\frac{\text{س}}{۲}$$

$$\text{اسیواسطے د دَ}^۲ = \text{نَ}^۲ - \frac{۲\,\text{نَ نُ}}{\text{جب}\frac{\text{س}}{۲}}\left[\text{جم}\,\frac{\text{ب} - \text{ا}}{۲} - ۲\,\text{جب}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جب}\frac{\text{ب}}{۲}\right]$$

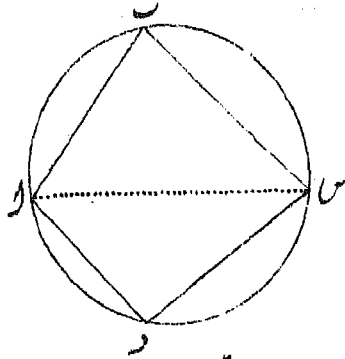
$$= \text{نَ}^۲ - \frac{۲\,\text{نَ نُ}}{\text{جب}\frac{\text{س}}{۲}}\left[\text{جم}\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{ا}}{۲} - \text{جب}\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\frac{\text{ا}}{۲}\right]$$

= ق^{2} − ٢ ن ق ق

اسیواسطے د د = √(ق^{2} − ٢ ن ق ق)

(٢٥٤) جو ذوار بعۃ الاضلاع دائرہ مین کہچ سکے اوسکا رقبہ دریافت کرو

فرض کرو کہ ا ب س د ایک ذوار بعۃ الاضلاع ہے اور

اب = طا اور ب س = طب اور س د = طس اور د ا = طا

شکل دو مثلثون ا ب س اور ا د س مین تقسیم ہوتی ہے اور اسیواسطے اوسکا رقبہ

= ½ (طا طب جب ب + طس طد جب د) = ½ (طا طب + طس طد) جب ب

کیونکہ زاویے ب اور د تکملے ہین

اب مثلث ا ب س مین

ا س^{2} = طا^{2} + طب^{2} − ٢ طا طب جم ب

اور مثلث س د ا مین

ا س^{2} = طس^{2} + طد^{2} − ٢ طس طد جم د = طس^{2} + طد^{2} + ٢ طس طد جم ب

اسیواسطے طس^{2} + طد^{2} + ٢ طس طد جم ب = طا^{2} + طب^{2} − ٢ طا طب جم ب

اسیواسطے جم ب = (طا^{2} + طب^{2} − طس^{2} − طد^{2}) ÷ ٢ (طا طب + طس طد)

اسیواسطے جب^{2} ب = ١ − (طا^{2} + طب^{2} − طس^{2} − طد^{2})^{2} ÷ ٤ (طا طب + طس طد)^{2}

= [٢ (طا طب + طس طد) + طس^{2} + طد^{2} − طا^{2} − طب^{2}] [٢ (طا طب + طس طد) − طس^{2} − طد^{2} + طا^{2} + طب^{2}] ÷ ٤ (طا طب + طس طد)^{2}

= [(طس + طد)² − (طا − طب)²] [(طا + طب)² − (طس − طد)²] / ۴ (طاطب + طس طد)²

اب فرض کرو کہ ½ (طا + طب + طس + طد) = م تو

جب² ب = ۱۶ (م − طا) (م − طب) (م − طس) (م − طد) / ۴ (طاطب + طس طد)²

اسی واسطے رقبہ ذو اربعۃ الاضلاع کا

= √((م − طا) (م − طب) (م − طس) (م − طد))

اگر اسکے تجاذبین جم ب کی قیمت مندرج کریں تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

اس² = طس² + طد² + ۲ طس طد (طا² + طب² − طس² − طد²) / ۲ (طاطب + طس طد)

= طس² + طد² + طس طد (طا² + طب² − طس² − طد²) / (طاطب + طس طد)

= (طاطس + طب طد) (طاطد + طب طس) / (طاطب + طس طد)

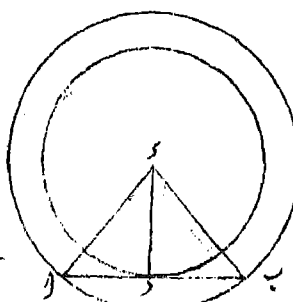
اور اسیطرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

جم ا = (طا² + طد² − طب² − طس²) / ۲ (طاطد + طب طس)

ب د² = (طاطس + طب طد) (طاطب + طس طد) / (طاطد + طب طس)

جو دائرہ ذو اربعۃ الاضلاع پر بنایا جای اوسکا نصف قطر بھی آسانی سے دریافت ہو سکتا ہے کیونکہ یہہ دائرہ مثلث ا ب س پر گذرتا ہی اسلیے بموجب دفعہ ۲۵۲ کے معلوم ہوتا ہے کہ نصف قطر

= اس / ۲ جب ب = ¼ √[(طاطب + طس طد) (طاطس + طب طد) (طاطد + طب طس) / (م − طا) (م − طب) (م − طس) (م − طد)]

(۲۵۵) منتظمۃ الاضلاع کے اوپر اور اندر جو دائرے بنائے جائیں اونکے نصف قطر دریافت کرو

فرض کرو کہ ن ضلع کی کثیر الاضلاع منتظمہ کا ایک ضلع اب ہی اور د مرکز دائرون کا ہے اور
د ر نصف قطر دائرہ اندرونی کا اور د ا نصف قطر دائرہ بیرونی کا ہے
اور فرض کرو کہ اب = طا اور د ا = نق اور د د = نق
زاویہ ا د ب کا ن وان حصہ چار قائمون کا ہے یعنی

ا د ب = ۲کہ/ن اور ا د د = کہ/ن

ا د = طا/۲ = نق جب کہ/ن = نق مس کہ/ن

اسواسطے نق = طا/(۲ جب کہ/ن) اور نق = طا/(۲ مس کہ/ن)

(٢٥٦) کثیر الاضلاع منتظمہ کا رقبہ نصف قطر دائرہ اندرونی یا بیرونی مین بیان ہوسکتا ہے
اسواسطے کہ دفعہ ٢٥٥ کی شکل مین رقبہ مثلث ا د ب کا

= ۱/۲ اب . د د = طا/۲ . طا/۲ مم کہ/ن = طا۲/۴ مم کہ/ن

اسواسطے رقبہ منتظمہ الاضلاع کا = ن طا۲/۴ مم کہ/ن = ن نق۲ جیا کہ/ن مم کہ/ن = ن/۲ نق

اسواسطے رقبہ کثیر الاضلاع = ن نق۲ مس۲ کہ/ن مم کہ/ن = ن نق۲ مس کہ/ن

(٢٥٧) دائرہ کا رقبہ دریافت کرو

جس دائرہ کا نصف قطر نق ہو اوسکے اوپر ن ضلعی کے منتظمہ الاضلاع کا رقبہ

= ن نق۲ مس کہ/ن = (کہ نق۲/جم کہ/ن) . (جب کہ/ن)/(کہ/ن)

اب فرض کرو کہ ن بے حد و نہایت زیادہ ہو تو رقبہ منتظمہ الاضلاع کا متواتر دائرہ کے رقبہ کے
قریب قریب ہوتا جائیگا اور آخر کار دائرہ ہی ہو جائیگا اسواسطے دائرہ کا رقبہ غایت الانتہا
جملہ مذکور کی ہوگی لیکن جب ن بے نہایت زیادہ ہو تو

جم کہ/ن = ۱ اور (جب کہ/ن)/(کہ/ن) = ۱ بموجب دفعہ ۱۱۸ کے

اسواسطے رقبہ دائرہ کا جسکا نصف قطر نق ہو = کہ نق۲

(۲۵۵) دائرہ کے قطاع کا رقبہ دریافت کرو

فرض کرو کہ بر مقیاس توسی قطاع کے زاویہ کا ہے تو

رقبہ قطاع / رقبہ دائرہ = ی / ۲ ک

اسیواسطے رقبہ قطاع = ک دو ق × ی / ۲ ک = ہو ی / ۲

چونکہ بر مقیاس توسی قطاع کے زاویہ کا ہے تو طول توس کا ق ہو گا اسسے معلوم ہوا کہ رقبہ قطاع کا برابر ہوتا ہے نصف حاصلضرب طول توس اور نصف قطر کے

مثالین

(۱) مثلث مستوی کے اضلاع ۴۴ اور ۳۰ اور ۱۸ ہین رقبہ اوسکا دریافت کرو

(۲) مثلث کے دو زاویے ۰ء اور ۴۵ ہین اور اوسکے درمیانی ضلع کا طول ۱ فیٹ ہی رقبہ دریافت کرو

(۳) ایک مثلث کے ضلع ۳ اور ۱۲ ہین اور زاویہ درمیانی اوسکا ۳۰ ہے اوسکے برابر جو مثلث متساوی الساقین قائم الزاویہ ہو اوسکا وتر دریافت کرو

(۴) رقبہ مثلث کا = ¼ (طا^۲ جب ۲ ب + طب^۲ جب ۲ ا)

(۵) رقبہ مثلث کا = (طا^۲ − طب^۲) جب ا جب ب / جب (ا − ب)

(۶) رقبہ مثلث کا

= ۲ طا طب طس / (طا + طب + طس) جم ا/۲ جم ب/۲ جم س/۲

(۷) مثلث جسکے اضلاع متناسب

ح ھ (ک^۲ + ل^۲) اور ک ل (ح^۲ + ھ^۲) اور (ھ ک + ح ل) (ھ ل − ح ک)

کے ہون اوسکا رقبہ اور علم مثلثی نسبتین اوسکے زاویون کے منطق ہوتی ہین

(۸) ایک مثلث کے ضلعے سلسلہ ہندسیہ مین ہین اور ایک مثلث متساوی الاضلاع ہے جسکا مجموعہ اضلاع پہلی مثلث کے مجموعہ اضلاع کے برابر ہے اور ان دونو مثلثون کے رقبون مین نسبت ۳ اور ۵ کی ہے اضلاع کی نسبت اور بڑے زاویہ کی قیمت دریافت کرو

(۹) اگر مسدس منتظم کے زاویئے علی التبادل وصل ہون اور ایک اور مسدس منتظم پیدا ہو اور پہر اس مسدس منتظم کے زاوئے علی التبادل وصل ہون اور علی ہذا القیاس تو ثابت کرو کہ اسطرح جو شکلین پیدا ہونگین اونکے رقبون کا مجموعہ = $\frac{1}{2}$ اسمین ا رقبہ اصل شکل کا ہے اور بالعموم اگر شکل کے ن اضلاع ہون تو مجموعہ

$$= \frac{ا جم^2 \frac{\pi}{ن}}{جب \frac{\pi}{ن} جب \frac{3\pi}{ن}}$$

اور وہ صورتین بیان کرو کہ اوسمین ن = ۳ یا ۴ ہے

(۱۰) اگر ایک قائم الزاویہ مثلث متساوی الساقین کے اوپر مثلث متساوی الاضلاع اسطرح بنایا جائے کہ اوسکے کونے پہلے مثلث کے اضلاع پر ہون اور ایک ضلع متوازی وتر کا ہو تو اوسکا رقبہ

۲ ط^2 جب ۶۰° (جب ۱۵°)^2 ہوگا

اسمین ط ایک ضلع مثلث معلوم کا ہے

(۱۱) دو نقطون کے درمیان فاصلہ ط ہی اور اونکی فاصلے ایک خط معلوم سے طر اور طس ہین تو تمام مثلثون مین سے جنکا قاعدہ ط ہی ہو اور جنکے راس خط معلوم پر واقع ہون تو جس مثلث کا زاویہ راس سب سے بڑا ہوگا اوسکا رقبہ $\frac{ط}{۲}$ $\sqrt{(طر طس)}$ ہوگا

(۱۲) مثلث ا ب س کے زاویون ا اور س کی جو خطوط مستقیم تنصیف کرتے ہین اور دائرہ بیرونی کے محیط سے نقاط اَ اور سَ پر ملتے ہین تو ثابت کرو کہ ا اَ س سَ ایسے تین حصون مین س ب اور ب ا سے تقسیم ہوگا جنمین تناسب

جب $\frac{ا}{۲}$: ۲ جب $\frac{ا}{۲}$ جب $\frac{ب}{۲}$ جب $\frac{س}{۲}$: جب $\frac{س}{۲}$ ہوگا

(۱۳) اگر مثلث قائم الزاویہ کے زاویہ قائمہ کے اضلاع کے درمیان تفاوت سہ ہو اور ص اوسکا رقبہ ہو تو قطر دائرہ بیرونی مثلث کا $\sqrt{سہ^2 + ۴ ص}$ ہوگا

(۱۴) ایک مثلث مستوی کے اضلاع ۳ و ۵ و ۶ ہین اوسکے اندرونی اور بیرونی دائرہ نکے نصف قطرون مین نسبت دریافت کرو

(۱۵) مثلث کے گرد جو دائرہ بنایا جاوے اوسکا مرکز م ہے اور ا ء خارج ہو کر ب س سے نقطہ د پر ملتا ہے تو ثابت کرو کہ

د ء جم (ب - س) = ا ء جم ا

(۱۶) ایک مثلث معلوم پر دائرہ بنایا گیا ہے اور نقاط تماس مین خطوط وصل کرکے ایک اور مثلث بنایا ہے اور پہر اس آخر مثلث مین ایک دائرہ بنایا ہے اور اوسکے اندر پہلی طرح سے مثلث بنایا ہے اور علی ہذا القیاس آگے بہی یہی سلسلہ جاری ہی تو ثابت کرو کہ مثلث اس طرح سے آخر کار مثلث متساوی الاضلاع ہو جایگا

(۱۷) مثلث مستوی کے اندر اور باہر جو دائرہ بنایا جای اونکی قطروں کا مجموعہ

طا م ا + طب م ب + طس م س ہی

(۱۸) مثلث کے اضلاع پر زاویوں ا اور ب اور س سے اسکے مقابل کے ضلعوں پر عمود نکالے ہیں اور اونکو دائرہ بیرونی تک خارج کیا ہے اگر حصص ممدودہ سہ وصہ و کہ ہون تو ثابت کرو

$\frac{طا}{سہ} + \frac{طب}{صہ} + \frac{طس}{کہ} = ۲$ (س س ا + س س ب + س س س)

(۱۹) مثلث ا ب س مین ایک دائرہ بنایا گیا ہی اور پہر چہوٹے دائرے مثلث کے دو ضلعوں اور اس دائرہ کو مس کرتے ہوے کہیچے گئے ہین تو اونکے نصف قطر دریافت کرو

(۲۰) ہر مثلث مین مثلث کے رقبہ اور اوسکے دائرہ اندرونی کے رقبہ مین وہ نسبت ہوتی ہے جو کہ کو م $\frac{ا}{۲}$ مم $\frac{ب}{۲}$ مم $\frac{س}{۲}$ سے نسبت ہے

(۲۱) مثلث حادۃ الزوایا کے اضلاع مین سے ہر ایک ضلع پر مثلث متساوی الساقین بنایا گیا ہے اور ہر ایک کے ضلع برابر نصف قطر دائرہ بیرونی کے ہین اگر انکے راسوں مین خطوط کو ملائین تو ایک مثلث متشابہ اور متساوی اصل مثلث کے بنے گا

(۲۲) اگر کسی مثلث کے دائرہ بیرونی کا نصف قطر ق ہو تو

طا جم ا + طب جم ب + طس جم س = ۴ ق جب ا جب ب جب س

(۲۳) مثلث ا ب س کے گرد جو دائرہ بنایا جاوے اوسکا مرکز د ہے اور د سے ء د

اور ری اور ہی ف عمود اضلاع پر نکالے گئے ہین تو ثابت کرو کہ

۴ (ء د + ر ی + ء ف) = طا حم ا + طب حم ب + طس حم س

(۲۴) اگر مثلث کے دائرہ اندرونی کا نصف قطر نق ہو اور نق ا اور نق ب اور نق س نصف قطر اون دائرون کے ہون جو اس دائرہ کو اور اون اضلاع کو جو محیط زاویہ ا اور ب اور س کے ہین کھینچے جائین تو ثابت کرو کہ

(نق ا نق ب) + (نق ب نق س) + (نق س نق ا) = نق

(۲۵) مثلث کا قاعدہ جن دو حصون مین دائرہ اندرونی کے نقطہ تماس سے تقسیم ہوتا ہے وہ حصے معلوم ہین تو دائرہ اندرونی کے نصف قطر کی قیمت بڑی سے بڑی دریافت کرو

(۲۶) اگر ا اور ب اور س سے مثلث کے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالین اور مواقع عمودون مین خطوط وصل کرین تو ثابت کرو کہ ب س = نق جب ۲ ا

اسمین نق نصف قطر اوس دائرہ کا ہی جو مثلث ا ب س کے اوپر بنایا جاوے

(۲۷) مثلث کے زاویون سے جو عمود مقابل کے ضلعون پر نکالے جائین اور وہ اضلاع سے نقاط د اور ی اور ف پر ملین تو ثابت کرو کہ اگر نق اور نق نصف قطر اون دائرون کے ہون جو مثلثات ا ب س اور د ی ف پر کھینچے جائین اور نق ا نصف قطر اوس دائرہ کا ہو جو آخر مثلث کے اندر بنایا جاوے تو

نق = ½ نق اور نق ا = ۲ نق حم ا حم ب حم س

(۲۸) اگر مثلث کے دائرہ اندرونی اور دوائر خارجی کے نصف قطر نق اور نق ا اور نق ب اور نق س ہون تو ثابت کرو کہ

$$س = \frac{نق\ نق_ا}{...}$$

(۲۹) اگر مثلث کے دائرہ اندرونی کا رقبہ ا ہو اور دوائر خارجی کے رقبے ا ا اور ا ب اور ا س تو

$$\frac{1}{\sqrt{ا_ا}} + \frac{1}{\sqrt{ا_ب}} + \frac{1}{\sqrt{ا_س}} = \frac{1}{\sqrt{ا}}$$

(۳۰) اگر ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ مین ہون تو بیچ کے ضلع پر مقابل کے ضلع سے جو عمود نکالا جاوے وہ اور نصف قطر اوس دائرہ کا جو اس بیچ کے ضلع اور باقی دو اضلاع ممدودہ کو مس کرتا ہی دونو ملکر برابر چند نصف قطر مثلث سے دائرہ اندرونی سے ہونگے

(۳۱) مثلث کے دوائر خارجی کے مرکزون سے مرکز دائرہ اندرونی کے فاصلون مین نسبت

جب $\frac{ا}{۲}$ و جب $\frac{ب}{۲}$ اور جب $\frac{س}{۲}$ کی ہی ہوتی ہے

(۳۲) دو متشابہ مثلثون کا دائرہ خارجی مشترک ہی اور اضلاع غیر متناظرہ طا$_۱$ اور طب$_۲$ کو مس کرتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$طا_۱ : طا_۲ = جب\ ب + جب\ س - جب\ ا : جب\ ا + جب\ س - جب\ ب$$

(۳۳) اگر ک$_۱$ اور ک$_۲$ اور ک$_۳$ مرکز دوائر خارجی مثلث کے ہین تو رقبہ مثلث ک$_۱$ ک$_۲$ ک$_۳$ کا

$$= رقبہ\ مثلث\ اب س \left[۱ + \frac{طا}{طب + طس - طا} + \frac{طب}{طا + طس - طب} + \frac{طس}{طا + طب - طس} \right]$$

(۳۴) ایک مثلث کے دوائر خارجیہ کے مرکزون مین خطوط وصل کیے ہین تو ثابت کرو کہ اسطرح جو مثلث پیدا ہوگا اوسکا رقبہ $\frac{طا\ طب\ طس}{۲\ نق}$ ہوگا اسمین نق نصف قطر دائرہ اندرونی کا ہے

(۳۵) اگر مثلث کے دوائر خارجیہ کے مرکز اَ اور بَ اور سَ ہوں اور خطوط اَ اور بَ اور سَ مین ملائین اور اب س اور اَ بَ سَ مین جو دائرے بنائین اونکی نصف قطر نق اور نقَ ہوتے ہے

$$\frac{نقَ}{نق} = \frac{مم \frac{ا}{۲}\ مم \frac{ب}{۲}\ مم \frac{س}{۲}}{مم \frac{ا}{۲} + مم \frac{ب}{۲} + مم \frac{س}{۲}}$$

(۳۶) اگر مثلث اب س کے دائرہ اندرونی کا نصف قطر نق ہو اور مجموعہ اضلاع ۲م ہو اور دوائر خارجیہ کی مرکزون مین خطوط ملانے سے جو مثلث پیدا ہوا اوسکے دائرہ اندرونی کا نصف قطر نقَ اور مجموعہ اضلاع ۲مَ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{نق\ م}{نقَ\ مَ} = ۲\ جب \frac{ا}{۲}\ جب \frac{ب}{۲}\ جب \frac{س}{۲}$$

(۳۷) اگر مثلث کے زاویہ ا کا بعد دائرہ اندرونی کے مرکز سے سہ اور سہ$_۱$ ہو اور جو

دائرہ مثلث کے ضلع طا اور دو اضلاع ممدودہ کو مس کرتا ہی اوسکے زاویہ ب کے العاد اس مثلث کے دائرہ اندرونی کے مرکز سے صہ و صہ ہون اور علی ہذا القیاس س کے واسطے بھی مقادیر لر اور لر ہون تو ثابت کرو کہ $\text{سہ صہ لر سہ}_1\text{ صہ}_1\text{ لر}_1 = (\text{طا طب طس})^2$

$$\frac{\text{طب طس}}{\text{طا}^2} + \frac{\text{طس طا}}{\text{صہ}_1^2} + \frac{\text{طا طب}}{\text{لر}_1^2} = 1$$

$$\text{سہ}^2\left(\frac{1}{\text{طس}} - \frac{1}{\text{طب}}\right) + \text{صہ}^2\left(\frac{1}{\text{طا}} - \frac{1}{\text{طس}}\right) + \text{لر}^2\left(\frac{1}{\text{طب}} - \frac{1}{\text{طا}}\right) = 0$$

$$\frac{\text{طب} - \text{طس}}{\text{طا طا}_1^2} + \frac{\text{طس} - \text{طا}}{\text{طب صہ}_1^2} + \frac{\text{طا} - \text{طب}}{\text{طس لر}_1^2} = 0$$

(۳۸) مثلث میں صرف ایک ہی نقطہ ایسا ہوتا ہے کہ اگر اوس سے عمود مقابل کے اضلاع پر نکالین تو تین ذو اربعۃ الاضلاع ایسے پیدا ہون کہ اونکے اندر دائرہ بن سکے اسکو ثابت کرو اور اگر $ر_1$ اور $ر_2$ اور $ر_3$ نصف قطر ان دائرون کے ہون اور ر نصف قطر مثلث کے دائرہ اندرونی کا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{1}{ر_1} - \frac{1}{ر}\right)\left(\frac{1}{ر_2} - \frac{1}{ر}\right) + \left(\frac{1}{ر_2} - \frac{1}{ر}\right)\left(\frac{1}{ر_3} - \frac{1}{ر}\right) + \left(\frac{1}{ر_3} - \frac{1}{ر}\right)\left(\frac{1}{ر_1} - \frac{1}{ر}\right) = \frac{1}{ر^2}$$

(۳۹) مثلث مستوی ا ب س مین ایک دائرہ بنایا گیا ہی اور ایک اور دائرہ مرتسم ہوا ہے جو ذو اربعۃ الاضلاع ا ب اور ا س اور دائرہ مذکور کو مس کرتا ہی اور پھر ایک تیسرا دائرہ بنایا ہی جو ذو اربعۃ الاضلاع ا ب اور ا س اور دوسرے دائرہ کو مس کرتا ہی اور علی ہذا القیاس اور دائرہ اسیطرح ب س اور ب ا کو اور س ا اور س ب کو بھی مس کرتے ہوئے کھینچے ہین تو ثابت کرو کہ رقبہ دائرہ اندرونی کا ان تمام دائرون کے رقبون کے مجموعہ سے ایسی نسبت رکھتا ہی جیسی کہ نسبت رکھتا ہی

$$\text{جب}^2\frac{ب+س}{4}\ \text{قم}\ \frac{ا}{2} + \text{جب}^2\frac{س+ا}{4}\ \text{قم}\ \frac{ب}{2} + \text{جب}^2\frac{ا+ب}{4}\ \text{قم}\ \frac{س}{2}$$

(۴۰) مثلث مستوی ا ب س کے اندر اور باہر دائرے بنائے گئی ہین اور د اور د ا اونکے مرکز مین ملاؤ د ا اور د ب اور د س اور د ا ا اور د ب ا اور د س ا اور فرض کرو کہ نق و نق ا و نق ب و نق س اور نق د و نق ا ب و نق ا س نصف قطر اون دائرون کے ہین جو مثلثات ب د س اور س د ا اور ا د ب اور ب د س اور س د ا اور ا د ب مین کھینچے جائین اور

اگر نق نصف قطر دائرہ بیرونی کا ہو جو مثلث ا ب س پر کھینچا جاے تو ثابت کرو کہ

نق ا، نق ب، نق س = نق ... اور طا/نق ا + طب/نق ب + طس/نق س = طا طب طس / نق ³

طا طب طس ÷ طا + طب + طس

(۴۱) ایک نقطہ ع کا مثلث کے اندر پایا ہے اور اوسکے ع ا اور ع ب اور ع س عمود اضلاع ب س او س ا اور ا ب پر نکالے گئے ہیں اور دائرے مثلث ع ا ب اور ع ب س اور ع س ا پر کھینچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ رقبہ مثلث کا جو مرکزون مین خطوط ملانے سے وصل ہوتا ہے ایک چوتھائی مثلث ا ب س کے رقبہ سے ہے

(۴۲) تین دائرے آپسمین باہر کی طرف مس کرتے ہین تو اونکے مرکزون مین خطوط وصل کرنے سے جو مثلث پیدا ہوگا اوسکے رقبہ کا مربع برابر ہوگا اوس حاصلضرب کے جو اونکے نصف قطرون کے مجموعہ کو نصف قطرون کے حاصلضرب مین ضرب دینے سے پیدا ہوگا

(۴۳) اگر ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ ہندسیہ مین ہون اور زاویون سے جو عمود مقابل کے ضلعون پر نکالے جائین اونکو اضلاع ایک مثلث کے بنائین تو اس نئے مثلث کے زاویے برابر اصل مثلث کے زاویون کے ہونگے

(۴۴) مثلث کے زاویون ا ب س سے جو عمود مقابل کے ضلعون پر نکالے جائین اور اضلاع طا طب اور طس اور ان عمودون کی نسبتین س ہ و صہ و لر ہون تو س ک + صہ + لر ۲ = ۲ (س صہ + صہ لر + لر س) + ۴ = ۰

(۴۵) کسی مثلث مین ثابت کرو کہ

$$طس = (طا - طب)\frac{جم \frac{س}{۲}}{جب \frac{ا - ب}{۲}} = (طا + طب)\frac{جب \frac{س}{۲}}{جم \frac{ا - ب}{۲}}$$

(۴۶) دو ضلع مثلث کے ۶۵ اور ۲۵ ہین اور ان ضلعون کے مقابل کے زاویون کا تفاوت ۶۰° ہے تمام زاویے دریافت کرو اور یہہ معلوم ہے کہ

لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ ء ، لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ ء

ل مس ۵۲° ۴۷′ ۳۰″ = ۱۰۱۱۲۴۵۰۸ ، ل مس ۲۵° ۵۲′ ۲۲″ = ۹۶۸۳۴۱۱۲ ء

(۴۷) اگر مثلث کے زاویون سے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالے جائین تو ثابت کرو کہ اضلاع مثلث کے

جو مواقع عمود مین مین خطوط ملانے سے بنا ہے اوسکے ضلعے طا جم ا اور طب جب ب اور طس جم س

ہین اور اسے ثابت کرو کہ طا^۲ جم ^۲ ا ـ طب جم ب طس جم س / طب طس جم س = جم ۳ ا

(۴۸) ایک مثلث کے کونون اور تین دوائر خارجیہ کے مابین چھ دائرے بنائے گئے ہین ہر ایک ایک ضلع ممدودہ کو مس کرتا ہے تو ثابت کرو کہ اونکے علی التبادل نصف قطر کے حاصل ضرب آپس مین برابر ہین

(۴۹) اگر مثلث کے دائرہ بیرونی کا نصف قطر ق ہو اور ب نصف قطر دائرہ خارجیہ کا ہو تو ان دائرون کے مرکزون کا فاصلہ √(ق^۲ + ۲ ق ب) ہوگا

(۵۰) مثلث کے زاویون ا اور ب اور س سے کسی نقطہ ع تک خطوط کھیچے گئے ہین اور مثلث کے مقابل کے ضلعون سے نقاط اَ اور بَ اور سَ پر ملتے ہین تو ثابت کرو کہ

ا بَ . ب سَ . س اَ = ا سَ . ب اَ . س بَ

(۵۱) ثابت کرو کہ مثلث کے اضلاع پر جو مقابل کے زاویون سے عمود نکالتے ہین وہ ایک نقطہ پر ملتے ہین

(۵۲) ثابت کرو کہ مثلث کے داخلی زاویون کی جو خطوط تنصیف کرتے ہین وہ ایک نقطہ پر ملتے ہین

(۵۳) اضلاع مثلث کے نقاط وسط اور مقابل کے زاویون مین جو خطوط وصل ہوتے ہین ایک نقطہ پر ملتے ہین

(۵۴) جن نقاط پر دائرہ اندرونی مثلث کے اضلاع کو مس کرتا ہی اونمین اور مقابل کے زاویون جو خطوط وصل کئے جائین وہ ایک نقطہ پر ملتے ہین

(۵۵) ایک ذو اربعۃ الاضلاع ایسی فرض کی ہی کہ اوسکے اندر اور اوپر دائرے بن سکتے ہین اور اوسکے اضلاع دونو طرف بڑہائے گئے ہین اور ق اور ق ب نصف قطر اون دائرون کے ہین جو اون مثلثون مین کہ دو ضلعون پر بنے کھیچے جائین اور ق س اور ق د اون دائرہ خارجیہ کے نصف قطر ہین جو بالمقابل دو اضلاع ممدودہ کے اندر کھیچے گئے ہین تو ق ق ب ق س ق د = ق^۴ اور ق نصف قطر اوس دائرہ کا ہی جو ذو اربعۃ الاضلاع مین بنائی جاے

سترہوان باب

مساواتون کے حل کرنے مین زوایا مستعانہ کے استعمال کی کیفیت اور صور قانونیہ جبریہ کو لوگارثم کے قابل بنانے کا حال

(۲۵۹) اب یہہ بیان کرتے ہین علم مثلثی جملون کی جدولون سے کس طرح مساوات درجہ دوم کی عددی قیمتین دریافت کرتے ہین

(۱) فرض کرو کہ یہہ مساوات ہو

$$لا^۲ - ۲ع\ لا + ق = ۰$$

اسمین ع اور ق دونو مثبت ہین اس مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$لا = ع \pm \sqrt{ع^۲ - ق} = ع \left[۱ \pm \sqrt{۱ - \frac{ق}{ع^۲}} \right]$$

اب اگر ق کم بہ نسبت ع^۲ کے ہے تو $\frac{ق}{ع^۲} = جب^۲ بر$ کے فرض کرو تو

$$لا = ع\ (۱ \pm جم\ بر)\ \ ۲ع\ جم^۲ \frac{بر}{۲}\ \ یا\ ۲ع\ جب^۲ \frac{بر}{۲}$$

اگر ق بڑا ع^۲ سے ہو تو قیمتین مساوات کی ناممکن ہو جائینگی تو ہم کو یہہ فرض کرنا چاہیے کہ

$\frac{ق}{ع^۲} = قط^۲ بر$ تو اسطرح

$$لا = ع \left[۱ \pm \sqrt{-۱}\ مس\ بر \right]$$ حاصل ہوگا

(۲) اب فرض کرو کہ مساوات یہہ ہو کہ

$$لا^۲ - ۲ع\ لا - ق = ۰$$

اسمین ع اور ق دونو مثبت ہین تو اس مساوات سے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا = ع \pm \sqrt{ع^۲ + ق} = ع \left[۱ \pm \sqrt{۱ + \frac{ق}{ع^۲}} \right]$$

اب فرض کرو کہ $مس^۲ بر = \frac{ق}{ع^۲}$ تو

$$لا = ع\ (۱ \pm قط\ بر) = ع \frac{جم\ بر \pm ۱}{جم\ بر} = \sqrt{ق}\ \frac{جم\ بر \pm ۱}{جب\ بر}$$

$$= \sqrt{ق}\ جم \frac{بر}{۲}\ یا\ - \sqrt{ق}\ مس \frac{بر}{۲}$$

(۳) اگر مساوات اس صورت $لا^۲ + ۲ع\ لا + ق = ۰$ کے ہو اسمین ع اور ق مثبت ہون تو اس مساوات $لا^۲ - ۲ع\ لا + ق = ۰$ حل کرو اور جو قیمتین حاصل ہون اونکی علامتین بدل دو تو بموجب دفعہ ۲۴ کے قیمتین مطلوب حاصل ہو جائینگی

(۴۰) اگر مساوات اس صورت لا۲ + ۲ع لا − ق = ۰ امین ع اور ق مثبت ہین تو ہم مساوات لا۲ − ۲ع لا − ق = ۰ کو حل کر سکتے ہین اور اوسے جو قیمتین حاصل ہون اونکی علامتین بدل دین تو قیمتین مطلوب حاصل ہو جائنگی

(۲۶۰) اسیطرح سے مساوات درجہ سوم یعنی مکعبی مساوات کی عددی قیمتین باستعانت جداول علم مثلثی جملون کے حاصل ہو سکتی ہین ہم اوسکی ایک صورت مثال دیکر لکھتے ہین

فرض کرو کہ مساوات لا۳ − ق لا − ر = ۰ ہو اور ۲۷ ر۲ چہوٹا ۴ ق۳ سے ہو تو لا = ن ی کے رکہو تو

ن۳ ی۳ − ق ن ی − ر = ۰

اسیواسطے ی۳ − ق ی / ن۲ − ر / ن۳ = ۰

اب بموجب دفعہ ۹۱ کے جم۳ سہ − ۳/۴ جم سہ − جم ۳ سہ / ۴ = ۰

فرض کرو کہ ی = جم سہ اور ۳/۴ = ق / ن۲ تو ر / ن۳ = جم ۳ سہ / ۴

پس ن = (۴ ق / ۳)^۱/۲ اور جم ۳ سہ = ۴ ر (۳ / ۴ ق)^۳/۲

اخر مساوات سے ۳ سہ دریافت ہوتا ہے اور اسے سہ معلوم ہوتا ہے تو

ی = جم سہ اور لا = ن جم سہ = (۴ ق / ۳)^۱/۲ جم سہ

اور قیمت جم ۳ سہ کی چہوٹی بہ نسبت واحد کے ہے کیونکہ ہم ۲۷ ر۲ کو چہوٹا ۴ ق۳ سے فرض کیا ہے

اب یہہ دفعہ ۱۰۵ سے ظاہر ہوتا ہے کہ ہم یہہ فرض کر سکتے ہین کہ

ی = جم (۲ ک ط / ۳ ± سہ)

اور یہہ بالکل موافق اوس جم ۳ سہ کے ہے جو اوپر بیان ہوا پس اخر کار یہہ تین قیمتین مساوات درجہ سوم کی حاصل ہونگین

۲ (ق / ۳)^۱/۲ جم سہ　اور ۲ (ق / ۳)^۱/۲ جم (۲ ک ط / ۳ ± سہ)

جم ۳ سہ = ر / ۲ (۳ / ق)^۳/۲

یہہ مین اگر مساوات درجہ دوم سوم مثل دفعات سابق کے حل کرنے کے لیے پیش ہون کی استعانت عددی قیمتین مجہول کی باسانی تر بیب طرح کو سے معلوم ہو سکتی ہین

مگر حقیقت یہہ ہے کہ جب طبعات کا اختلاط ریاضیات کے ساتھہ ہوتا ہے تو درمیان ایسی مساواتون کے حل کرنیکی یہہ ترکیب شاذ ونادر کام آتی ہے اسلئے علم مثلثی نسبتون کی جدولون کا استعمال مساواتون کے حل کرنےمین ایک عجیب بات ہے مگر کچھہ کام کی بات نہین (ڈوہ ہوس کا رسالہ علم مثلث)

(۲۶۲) اوپر جو مثالین زوایاے مستعان کی بیان ہوئی ہین اونکی دو اور مثالین لکھتے ہین

(۱) ط+ص کی ایسی صورت پیدا کردو کہ وہ لوکارثمی حساب کے قابل ہوجاے

اگر ط اور ص ضروری مثبت ہون تو اسطرح عمل کرو کہ ص/ط = مس^۲ بر کے فرض کرو تو

ط + ص = ط (۱ + ص/ط) = ط (۱ + مس^۲ بر) = ط قط^۲ بر

اور اگر ط اور ص کا مثبت ہونا ضروری نہ ہو تو اسطرح سے عمل کرتے ہین کہ ص/ط = مس بر کے فرض کرتے ہین تو

ط + ص = ط (۱ + ص/ط) = ط (۱ + مس بر) = ط/جم بر جم (ط/۴) (جم بر/... + جب بر/...)

= ط جب (ط/۴)/جم بر جب (بر + ط/۴)

(۲) ط جم سہ ± ص جب سہ کو حساب لوکارثمی کے قابل بنادو فرض کرو کہ ص/ط = مس بر تو

پس ط جم سہ ± ص جب سہ = ط (جم سہ ± ص/ط جب سہ) = ط (جم سہ ± مس بر جب سہ)

= ط/جم بر جم (سہ ∓ بر) یعنی ط/جم بر جم (سہ + بر)

امثلہ متفرقہ

(۱) حل کرو لا^۳ + ۹ لا^۲ + ۲۱ لا + ۱۳ = ۰

(۲) ثابت کرو کہ مساوات لا^۳ − ۳ لا − ۱ = ۰ کی قیمتین ۲ جم ۲۰° اور − ۲ جب ۱۰° اور − ۲ جم ۴۰° ہین

(۳) ثابت کرو کہ مساوات لا^۵ − ع لا^۳ + ق لا ± ر = ۰ کی قیمتین ۲ (ع/۵)^{۱/۲} جم سہ/۵ اور ۲ (ع/۵)^{۱/۲} جم (۲ک ± سہ)/۵ ہین جم سہ = ر/۲ (۵/ع)^۵ بشرطیکہ ع^۲ = ۵ ق اور (ر/۲)^۲ کم ہو بہ نسبت (ع/۵)^۵ کے ہوگا

(۴) اس مساوات

لاٞ - ۱۰ لاٖ + ۳۰ لا - ۸ = ۰ کی قیمتین دریافت کرو

(۵) ایک مثلث کونی کہیت اب س تہا اوسکا ایک ضلع ب س ایک شخص کو دریافت کرنا تہا مگر وہ اوسی دائرہ مین خطوط کی پیمایش کرسکتا ہی جو ا س پر گذرتا ہی اور ب س کو مس کرتا ہی تو بتلاو چار خطوط کی پیمایش کے بعد کس طرح وہ ب س کو تحقیق کرسکتا ہے

(۶) دو آدمی ایک ہی مقام پر کہڑی ہوئی تہے اونہون نے دو شیا ا اور ب کے محاذی زاویے افقی دیکہے اور پہر دونو جلدی ایک ا س کی سمت مین جاتا ہی اور دوسرا ب س کی سیدہ مین اور پہر ہر ایک نے زاویے افقی بہ نسبت سابق کے نصف مشاہدہ کئے اور ہر شخص نے جو مسافت طے کی وہ معلوم ہے اور س پر کے زاویے افقی معلوم ہین فاصلہ اب کو دریافت کرو

(۷) ایک بلون کا ارتفاع تین مقامون ا اور ب اور س پر دیکہا گیا تو وہ ۴۵° اور ۴۵° اور ۶۰° تہا اور ا بلحاظ س کے مغرب کو اور بلحاظ س کے شمال کو واقع ہے ایک مساوات ایسی بناؤ کہ اوس سے ارتفاع بلون کا معلوم ہوا کرے

(۸) مقام ا کے فاصلے دو اور مقامات ب اور س سے ص اور ح معلوم ہین اور زاویہ ب ا س کا دریافت کرنا منظور ہے اب ہم زاویہ ب ا س کا تو مشاہدہ کسیطرح کر نہین سکتے اسلیئے اسے ایک فاصلہ معلوم ر پر ی کا مقام مقرر کرتے ہین اور زاوئیے ب ی س (سہ) اور ا ی س (صہ) مشاہدہ کرتی ہین تو ثابت کرو کہ اگر بر مقیاس قوسی زاویہ (ب ا س - ب ی س) کا ہو تو تقریباً

$$ب = ر \left[\frac{\text{جب}\,(سہ - صہ)}{ص} + \frac{\text{جب}\,صہ}{ح} \right]$$

(۹) ایک برج کا زاویہ ارتفاع ۵۰ فیٹ کے فاصلہ پر پائین برج سے ۵۴° ہے اگر ارتفاع اور بعد السیا صحیح ناپا جاے کہ زاویہ مین ا سے اور ارتفاع مین انچ سے کم غلطی ہو تو برج کی بلندی مین بڑی سے بڑی غلطی دریافت کرو

(۱۰) ایک برج کے ط فاصلہ پر ایک شخص کہڑا ہوا تہا اور برج پر ایک علم قائم تہا اور علم اور برج دونو کا

زاویہ نظری ایک ہی بتاتھا اگر ص بلندی معلوم برج کی ہو تو علم کے ارتفاع ح کو ص اور ط کی رقموں مین بیان کرو

اور اگر برج کی بلندی مین بقدر صہ کی غلطی واقع ہو اور اوسے علم کی بلندی مین بقدر ر کے غلطی ہو جاے تو ثابت کرو کے

$$\text{ر}/\text{ح} = \text{صہ}/\text{ص} \left[1 + \frac{\text{ہ ص ط}}{\text{ط}^2 - \text{ص}^2} \right]$$

(۱۱) ایک مثلث کا ایک ضلع اور اوسکے مقابل کا زاویہ نا متغیر ہین تو ثابت کرو اور اضلاع لر اور صد کی خفیف غلطیون سے یہہ ارتباط قائم ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{لر}}{\text{قطا س}} + \frac{\text{صد}}{\text{قطا ب}} = ۰$$

(۱۲) ایک مینار اسطوانہ کی شکل کا گول ہے اور اوسکا عرض اور ارتفاع قوسی سہ اور صہ ہے اور مینار کے قریب تر ط فیٹ پر زاویہ ارتفاع اور عرض سہَ اور صہَ ہے تو بلندی اور نصف قطر مینار کا دریافت کرو اور جو ارتباط سہ اور سہَ اور صہ اور صہَ کے درمیان ہو اوسے معلوم کرو

(۱۳) اسکے پہلے سوال مین اگر عرض قوسی مین غلطی فر کی ہو جاے اور نصف قطر نو کے حساب کرنے مین جو سب سے بڑی غلطی ب ہو تو ثابت کرو کہ ب اس مساوات سے معلوم ہو جاویگا

$$\frac{\text{ب}}{\text{نو}} = \text{مم}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{صہَ} - \text{صہ}) \left[\text{قم}\ \tfrac{\text{صہ}}{۲}\ \text{قم}\ \tfrac{\text{صہَ}}{۲} - \text{مم}\ \tfrac{\text{صہ}}{۲}\ \text{مم}\ \tfrac{\text{صہَ}}{۲} \right] \text{فر}$$

اگر صہ = ۶۰° اور صہَ = ۱۲۰° اور فر = ۱'' نصف قطر کے حساب لگانی مین جو سب سے بڑی غلطی واقع ہوگی اوسکی نسبت نصف قطر سے بتلاؤ

(۱۴) ع اور ق اور ر مقامات معلوم ایک خط مستقیم مین ہین اور خاص نقطہ ص سے ع ق اور ق ر کے محاذی برابر زاویے بنتے ہین اگر مشاہدہ کی ہوئی زاویون مین چھوٹی سی غلطی نقطہ ص کے واقع ہو تو بڑی سی غلطی ص اور ق کے درمیانی فاصلہ کی کیا ہوگی

اٹھارہوان باب

معکوس جملے علم مثلثی

(۲۶۳) مساوات جب لا = ط سے یہہ سمجھا جاتا ہے کہ لا وہ زاویہ ہے جسکی جیب ط ہے اس ارتباط کو ایک اور طریقہ سے بھی لکھتے ہین اور اوسمین صرف لا ہی قائم رہتا ہے اور بڑی آسانی

اوسمین ہوتی ہے اور وہ طریقہ کتابت یہہ ہے کہ لا = جب^۱ ط اور ایسی ہی لا = جم^۱ ط سے یہہ سمجھا جاتا ہے کہ لا وہ زاویہ ہے جسکی جیب التمام ط ہے اور لا = مس^۱ ط سے یہہ ظاہر ہوتا ہے کہ لا وہ زاویہ ہے جسکا مماس ط ہے اور علی ہذا القیاس

(۲۶۴) تجربہ سے یہہ بات ثابت ہوگی کہ اس طریقہ کتابت کے اختیار کرنے مین سہولت ہے اور یہہ بھی ثابت کرینگے کہ اس طریقہ کتابت مین جو -۱ رمز قوت نما کی طرح کام مین آتی ہے وہ یونہین خواہ مخواہ نہین مقرر کرلی بلکہ اوسکی اصلی اور نفس الامری معنی بھی ایسے ہین جو -۱ کے معنی اسطرح لکہنے سے ہوتی ہین اب ہم اسبات کو ثابت کرتے ہین فرض کرو کہ لا کا جملہ ح (لا) سے تعبیر کیا جاے تو وہی جملہ ح (لا) کا ح [ح (لا)] سے تعبیر ہوگا اور اوسکو آسانی سے ح^۲ (لا) تعبیر کرسکتے ہین مثلاً لوکارثم لا کی لوکارثم یعنی لو اوسکو لو^۲ لا سے تعبیر کرنے مین سہولت ہے اور ایسی ہی ح [ح [ح (لا)]] کو اختصار کو آسانی کے واسطے ح^۳ (لا) سے تعبیر کرین اور علی ہذا القیاس پس موجب اس طریقہ کتابت کے جبکہ م اور ن مثبت صحیح ہون

ح^م ح^ن (لا) = ح^{م+ن} (لا)

اب امتحان کرکے یہہ تبلاتے ہین کہ ح^۰ (لا) کے کیا معنی پیدا ہون کہ ارتباط مذکور اس حالت پر بھی صادق آوے کہ م یان صفر ہو فرض کرو کہ ن = ۰ تو ارتباط مذکور یہہ ہوجائیگا کہ

ح^م ح^۰ (لا) = ح^م (لا)

اسے یہہ فیصلہ ہوتا ہے کہ ح^۰ (لا) برابر لا کے خیال ہوسکتا ہے

اب ہم امتحان کرکے یہہ تبلاتے ہین کہ ح^۱ (لا) کے کیا معنی لئے جائین کہ ارتباط مذکور

ح^م ح^ن (لا) = ح^{م+ن} (لا) اوس حالت پر بھی صادق آوے کہ م یان -۱ ہو

فرض کرو کہ م = ۱ اور ن = -۱ تو ارتباط مذکور کی یہہ صورت ہوگی کہ

ح ح^{-۱} (لا) = ح^۰ (لا) = لا

پس ح^{-۱} (لا) وہ مقدار تعبیر ہوتی ہے جسکا جملہ ح لا ہے

پس جب^۱ لا اوس مقدار کو تعبیر کرتی ہے جسکی جیب لا ہے اور یہی معنی ہمنے اس رمز کے تبلائی ہین

اب اس بیان کے مطابق ضرور ہے کہ جب^۱ لا کی قیمت جب (جب لا) ہو اور یہہ معنی اوسکی نہوں کہ جب لا = جب لا لیکن اس سبب سے کہ جب (جب لا) ایسا جملہ ہے کہ شاذونادر واقع ہوتا ہے اسلیے عادت یوں پڑگئی ہی کہ جب^۱ لا کو بجای اوس مقدار کے جو (جب لا) سے تعبیر ہوتی ہے استعمال میں لاتے ہیں

(۲۶۵) جو ارتباط کہ علم مثلثی جملوں میں قائم ہو اور معکوس جملوں میں بیان ہو سکتا ہی مثلاً ہمکو معلوم ہے کہ

$$\text{مس}\ ۲\text{بر} = \frac{۲\ \text{مس بر}}{۱ - \text{مس}^۲\ \text{بر}}$$

اور اسکو ہم اسطرح لکھہ سکتے ہیں کہ

$$۲\ \text{بر} = \text{مس}^{-۱}\ \frac{۲\ \text{مس بر}}{۱ - \text{مس}^۲\ \text{بر}}$$

فرض کرو کہ مس بر = ط تو بر = مس^۱ ط پس

$$۲\ \text{مس}^{-۱}\ \text{ط} = \text{مس}^{-۱}\ \frac{۲\text{ط}}{۱ - \text{ط}^۲}$$

اور علیٰ ہذا القیاس جب ۳بر = ۳ جب بر − ۴ جب^۳ بر کو اسطرح بہی تعبیر کر سکتے ہیں

$$۳\ \text{جب}^{-۱}\ \text{ط} = \text{جب}^{-۱}\ (۳\text{ط} - ۴\text{ط}^۳)$$

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مس^۱ $\frac{۱۲۰}{۱۱۹}$ = ۲ مس^۱ $\frac{۵}{۱۲}$

(۲) جب (جب^۱ $\frac{۱}{۲}$ + جم^۱ $\frac{۱}{۲}$) کی قیمت دریافت کرو

(۳) ثابت کرو کہ جب^۱ $\frac{۷۷}{۸۵}$ = جب^۱ $\frac{۳}{۵}$ + جب^۱ $\frac{۸}{۱۷}$

(۴) مس (مس^۱ لا + جم^۱ لا) کی قیمت دریافت کرو

(۵) مس^۱ $\frac{۱}{۲}$ + مس^۱ $\frac{۱}{۵}$ + مس^۱ $\frac{۱}{۷}$ مس^۱ $\frac{۱}{۸}$ = $\frac{\pi}{۴}$

(۶) ثابت کرو کہ مس^۱ ط = مس^۱ $\frac{\text{ط} - \text{ص}}{۱ + \text{ط ص}}$ + مس^۱ $\frac{\text{ص} - \text{س}}{۱ + \text{ص س}}$ + مس^۱ س

(۷) مماس نصف جیب^۱ $\frac{۱}{۲}$ + مس^۱ $\frac{۱}{۲}$ + مس^۱ $\frac{۱}{۱۲}$ − $\frac{\pi}{۴}$ کا دریافت کرو

(۸) ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ [(جذ۲ + ۱) مس سہ] − مس$^{-1}$ [(جذ۲ − ۱) مس سہ] = مس$^{-1}$ (جب ۲ سہ)

(۹) اگر مس (ا − سہ) مس (ا − صہ) = مس^{2} بہ تو

بہ = ½ مس$^{-1}$ (۲ جب سہ جب صہ) / (جب (سہ + صہ))

(۱۰) ثابت کرو کہ جم$^{-1}$ ۹/جذ(۸۲) + قتم$^{-1}$ جذ۴۱/۴ = ک/۴

(۱۱) ثابت کرو کہ جب$^{-1}$ ۴/۵ + جب$^{-1}$ ۵/۱۳ + جب$^{-1}$ ۱۶/۶۵ = ک/۲

(۱۲) ثابت کرو کہ ۳ مس$^{-1}$ ۱/۴ + مس$^{-1}$ ۱/۲۰ = ک/۴ − مس$^{-1}$ ۱/۱۹۸۵

(۱۳) ثابت کرو کہ مس$^{-1}$ (۲ط − ص)/(ص جذ۳) + مس$^{-1}$ (۲ص − ط)/(ط جذ۳) = ک/۳

(۱۴) ثابت کرو کہ مس (۲ مس$^{-1}$ ط) = ۲ مس (مس$^{-1}$ ط + مس$^{-1}$ ط^{3})

(۱۵) ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ (½ مس ۲ا) + مس$^{-1}$ (مم ا) + مس$^{-1}$ (مم^{3} ا) = ۰

(۱۶) ثابت کرو کہ

۲ص/ط = مس (ک/۴ + ½ جم$^{-1}$ ط/ص) + مس (ک/۴ − ½ جم$^{-1}$ ط/ص)

(۱۷) ثابت کرو کہ

ط^{3}/۲ قتم^{2} (½ مس$^{-1}$ ط/ص) + ص^{3}/۲ قط^{2} (½ مس$^{-1}$ ص/ط) = (ط + ص) (ط^{2} + ص^{2})

ان سات مساواتوں کو حل کرو

(۱۸) جب$^{-1}$ ۲ط/(۱ + ط^{2}) + جب$^{-1}$ ۲ص/(۱ + ص^{2}) = ۲ مس$^{-1}$ لا

(۱۹) جب$^{-1}$ ۲ط/(۱ + ط^{2}) + جب$^{-1}$ ۲ص/(۱ + ص^{2}) = ۲ مس$^{-1}$ لا

(۲۰) مس$^{-1}$ (لا − ۱) + مس$^{-1}$ لا + مس$^{-1}$ (لا + ۱) = مس$^{-1}$ ۳لا

(۲۱) جب$^{-1}$ ۲لا − جب$^{-1}$ لا جذ۳ = جب$^{-1}$ لا

(۲۲) مس$^{-1}$ ۱/۴ + ۲ مس$^{-1}$ ۱/۵ + مس$^{-1}$ ۱/۶ + مس$^{-1}$ ۱/لا = ک/۴

(۲۳) جب ۲ جم$^{-1}$ مم ۲ مس$^{-1}$ لا = ۰

(۲۴) مس$^{-1}$ ۱/(ط − ۱) = مس$^{-1}$ ۱/لا + مس$^{-1}$ ۱/(ط^{2} − لا + ۱)

(۲۵) اگر قطا بر = قم بر = $\frac{\text{ط}}{\text{۴}}$ تو ثابت کرو کہ بر = $\frac{1}{2}$ جب$^{-1}$ $\frac{\text{ط}}{\text{۴}}$

(۲۶) اگر جب (کہ جم بر) = حم (کہ جب بر) تو ثابت کرو کہ بر = $\pm\frac{1}{2}$ حت$^{-1}$ $\frac{\text{ط}}{\text{۴}}$

(۲۷) اگر جب$^{-1}$ بر + جب$^{-1}$ سر = $\frac{\text{ط}}{2}$ تو ثابت کرو کہ مر کی قیمتون مین سے ایک قیمت (۲ن + ۱) کے مساوات ذیل کی شرائط کو پورا کرتی ہے

بمر = جب$^{-1}$ (جب بر + جب سر) + جب$^{-1}$ (جب بر − جب سر)

(۲۸) لا کو ان مساواتون سے دریافت کرو

۲ مس$^{-1}$ $\frac{1}{\text{لا}+۲}$ − مس$^{-1}$ $\frac{1}{\text{لا}}$ = مس$^{-1}$ $\frac{1}{۴}$

(۲۹) ثابت کرو کہ ان جملون مین سے ایک

جب$^{-1}$ $\frac{\text{ص} + \text{ط} - \text{س}}{\text{ط} + \text{س}}$ ± ۲ حت$^{-1}$ $\sqrt{\frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ط} + \text{س}}}$

ایک طاق اضعاف $\frac{\text{ط}}{۲}$ کا ہے

(۳۰) سب صحیح مثبت حل اس مساوات کے دریافت کرو کہ

مس$^{-1}$ لا + مس$^{-1}$ $\frac{1}{\text{ہ}}$ = مس$^{-1}$ ۳

(۳۱) ثابت کرو کہ اگر ح ایک مثبت صحیح ہو تو مساوات

مس$^{-1}$ لا + مس$^{-1}$ ی = مس$^{-1}$ ح

کوئی مثبت صحیح حل نہ ہوگا اور مساوات

مس$^{-1}$ $\frac{1}{\text{لا}}$ + مس$^{-1}$ $\frac{1}{\text{ی}}$ = مس$^{-1}$ $\frac{1}{\text{ح}}$

کے اتنے مثبت حل ہونگے جتنی ۱ + ح^2 کے مختلف تقسیم کرنیوالے ہونگے

(۳۲) ثابت کرو کہ مس$^{-1}$ $\frac{\text{لا}}{\text{ی}}$ = مس$^{-1}$ $\frac{\text{ح}_1 \text{لا} - \text{ی}}{\text{ح}_1 \text{ی} + \text{لا}}$ + مس$^{-1}$ $\frac{\text{ح}_2 - \text{ح}_1}{\text{ح}_2 \text{ح}_1 + 1}$

+ مس$^{-1}$ $\frac{\text{ح}_3 - \text{ح}_2}{\text{ح}_3 \text{ح}_2 + 1}$ + ... + مس$^{-1}$ $\frac{\text{ح}_\text{ن} - \text{ح}_{\text{ن}-1}}{\text{ح}_\text{ن} \text{ح}_{\text{ن}-1} + 1}$ + مس$^{-1}$ $\frac{1}{\text{ح}_\text{ن}}$

اسمین ح$_1$ اور ح$_2$ ... ح$_\text{ن}$ وغیرہ خواہ کچھہ ہی مقادیر ہون

(۳۳) مجموعہ کتنے ایک زاویون

جب$^{-1}$ $\frac{۲\text{ط}\text{ص}}{\text{ط}^2+\text{ص}^2}$ اور جب$^{-1}$ $\frac{۲\text{ط}\text{ص}}{\text{ط}^2+\text{ص}^2}$ ..... کا

اس صورت مین بیان ہوسکتاہے کہ

جب ا $\frac{۲ م ن}{م^۲ + ن^۲}$

اسمین م اور ن ناطق جملے ط اور ص اور ط اور ص ۔ ۔ ۔ کے ہین

(۳۴) جب ا $\frac{(۱-)}{۲}$ م کی عام قیمت لکھو اسمین م ایک صحیح ہے

(۳۵) عام قیمت جم ا $\frac{(۱-)}{۱}$ م کی لکھو اسمین م ایک صحیح ہے

اونیسوان باب

ضابطہ دی مووٗر

(۲۶۶) جبر مقابلہ میں طالب علموں نے ایہی پڑہا ہی کہ منفی مقدار کا جذر ایک ناممکن عمل کی علامت ہے مگر پہر بہی ایسے جذر سے تحقیقات ریاضیہ مین بہت کام چل جاتے ہین اکثر باتفاق جمہور یہہ امر تسلیم کیا گیاہے کہ

$$\sqrt{-ا} = ا \sqrt{-۱}$$

اور جملہ قوانین جبریہ تبدل صورت کے جملہ ا $\sqrt{-۱}$ پر متصرف ہین اب اس باقی کتاب مین $\sqrt{-۱}$ اکثر واقع ہوگا اور ابتدا مین ہم تسلیم کر لیتے ہین کہ یہہ خیالی جملہ $\sqrt{-۱}$ کا شل ایک اصلی جملہ کے ہے اور اوسپر تمام اعمال جبریہ اوسیطرح متصرف ہین جس طرح اصلی جملون پر ہوتے ہین اور پہر جو اثبات رمز $\sqrt{-۱}$ پر موقوف ہونگے اونکے استحکام کو دکھلا دینگے پچیسوان باب جبر مقابلہ کا دیکہو

(۲۶۷) **ضابطہ موئوور** خواہ ن مثبت ہو خواہ منفی خواہ صحیح خواہ کسر غرض سب صورتون مین جم ن بر + $\sqrt{(-۱)}$ جب ن بر ایک قیمت [جم بر + $\sqrt{-۱}$ جم بر]^{ن} کے قیمتون مین سے ہے

جم صہ بر + $\sqrt{-۱}$ جب سہ کو جم صہ + $\sqrt{-۱}$ جب صہ مین ضرب دو تو حاصلضرب

جم سہ جم صہ − جب سہ جب صہ + $\sqrt{-۱}$ جب سہ جم صہ + جم سہ جب صہ

یعنی جم (سہ + صہ) + $\sqrt{-۱}$ جب (سہ + صہ)

اب پہر اس جملہ کو جم لر + $\sqrt{-۱}$ جب لر مین ضرب دو تو حاصلضرب

جم (سہ + صہ + لر) + $\sqrt{-۱}$ جب (سہ + صہ + لر) ہوگا

اسیطرح عمل کرنے سے ہمکو جم س + $\sqrt{-1}$ جب س کیصورت کے جو اجزاء ضربی ہونگے اونکا حاصل ضرب ن کو م ہوگا

اب فرض کرو کہ ایسی اجزاء ضربی ن ہین جنمین سے ہر ایک جم بر + $\sqrt{-1}$ جب بر ہے تو یہہ حاصل ہوگا کہ

[جم بر + $\sqrt{-1}$ جب بر]ن = جم ن بر + $\sqrt{-1}$ جب ن بر

اسسے ضابطہ دی موئور ن کے مثبت صحیح ہونیکی حالت مین ثابت ہے

دوم فرض کرو کہ ن منفی صحیح ہو تو ن = ـ م کے فرض کرو

[جم بر + $\sqrt{-1}$ جب بر]ن = [جم بر + $\sqrt{-1}$ جب بر]ـم

= 1 / [جم بر + $\sqrt{-1}$ جب بر]م

شمار کنندہ نسب نما دونو کو جم م بر ـ $\sqrt{-1}$ جب م بر مین ضرب کرو تو یہہ حاصل ہوگا

(جم م بر ـ $\sqrt{-1}$ جب م بر) / (جم۲ م بر + جب۲ م بر)

یعنی جم م بر ـ $\sqrt{-1}$ جب م بر

یعنی جم (ـ م بر) + $\sqrt{-1}$ جب (ـ م بر)

یا جم ن بر + $\sqrt{-1}$ جب ن بر

اسسے ضابطہ دی موئور کا اوس حالت مین ثابت ہوتا ہے کہ ن منفی صحیح ہو

پس جب ن صحیح ہو تو ہر حالت مین

[جم بر + $\sqrt{-1}$ جب بر]ن = جم ن بر + $\sqrt{(-1)}$ جب ن بر

اسسے ثابت ہوتا ہے کہ جم بر + $\sqrt{-1}$ جب بر ایک قیمت

[جم ن بر + $\sqrt{-1}$ جم ن بر]$^{\frac{1}{ن}}$ کی قیمتون مین سے ہے

جب ن کوئی صحیح ہو

اب آخر یہہ فرض کرو کہ ن کسر ہے تو ن = ع/ق کے فرض کرو

[جم بر + $\sqrt{-1}$ جم بر]ن = [جم بر + $\sqrt{-1}$ جب بر]$^{\frac{ع}{ق}}$

= [جم ع بر + $\sqrt{-1}$ جب ع بر]$^{\frac{1}{ق}}$

تو اس آخر جملہ کی قیمتون مین سے ایک قیمت یہہ ہوگی کہ

جم ع بر/ق + $\sqrt{-1}$ جب ع بر/ق

پس ڈی موائور کا ضابطہ سب حالتون مین ثابت ہوگیا

(۲۸۶) ہم نے ثابت کیا ہے کہ جب ن کسر ہو تو

جم ن بر + ۱-√ جب ن بر ایک قیمت

[جم بر + ۱-√ جب بر]^ن کی قیمتون مین سے ہوتی ہے

اب ہم یہہ بتلاتے ہین کہ کل قیمتین اخر جملہ کی کس طرح دریافت ہوتی ہین

فرض کرو کہ ن = ع/ق اب جم بر اور جب بر مین کچھہ تغیر اس سبب سے نہین واقع ہوسکتا کہ بر پر کوئی اضعاف ۲ کہ کا زیادہ ہوجاے پس جب بر کی جگہہ بر + ۲ ر کہ رکھین اور ر کی بتواتر صحیح قیمتین فرض کرین تو جملہ جم ن بر + ۱-√ جب ن بر کی ق مختلف قیمتین ہونگین اور اسے زیادہ نہین ہونی کی اسواسطے کہ ر تو برابر ۰ و ۱ و ۲ و ۳ . . . ق - ۱ کے فرض کرو تو یہہ سلسلہ زاویون کا حاصل ہوگا کہ

ع بر/ق و ع (بر + ۲ کہ)/ق و ع (بر + ۴ کہ)/ق . . . ع (بر + ۲ ق کہ - ۲ کہ)/ق

اور یہہ ہمکو معلوم ہے کہ ان زاویون مین کوئی زوج زاویے ایسے نہین ہین کہ اونکی جیب ایک ہی ہو یا جیب التمام ایک ہی کیونکہ اونمین تفاوت بقدر ۲ کہ کے نہین ہے دفعہ ۹۳ کو دیکھو پس اسطرح ہمکو ق مختلف قیمتین جملہ جم ن بر + ۱-√ جب ن بر کی حاصل ہوتی ہین اور اسطرح سے ہمکو ن قیمتون سے زیادہ قیمتین نہین حاصل ہونگی اسواسطے کہ ر = ص + م ق اسمین م مثبت یا منفی صحیح عدد ہے

جم ن (بر + ۲ ر کہ) اور جب ن (بر + ۲ ر کہ)

برابر ہین جم ن (بر + ۲ ص کہ) اور جب ن (بر + ۲ ص کہ)

پس اسطرح اسے ق مختلف قیمتین جملہ

[جم بر + ۱-√ جب بر]^(ع/ق)

کی دریافت کرتے ہین ہم ق مختلف جملہ دریافت کرسکتے ہین جنکی ق وین قوت سے ع بر + ۱-√ جب ع بر پیدا ہو اور یہہ مسایل مساوات سے ثابت ہے کہ جو قیمتین لا کی مساوات لا^ق = ح کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ ق قیمتین ہین اور اون سے زیادہ نہین خواہ ح اصلی ہو یا اس صورت ا + ب ۱-√ کا ہو پس یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہمکو تمام قیمتین جملہ

$[$جم بر $+ \sqrt{-1}$ جب بر$]^{ن}$ معلوم ہین

(۲۶۹) اب ہم ضابطہ دی موئور سے نتائج عظیمہ مستنبط کرتے ہین

مساوات

جم ن بر $+ \sqrt{-1}$ جب ن بر $=$ $[$جم بر $+ \sqrt{-1}$ جب بر$]^{ن}$

مین فرض کرو کہ ن مثبت صحیح ہی اب بائین طرف کے جملہ کی بموجب ضابطہ جملہ ثنائی کی صورت منفصلہ لکھو اور ممکن اور ناممکن اجزاء دونو ارکان کے مساوی لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جم ن بر $=$ $جم^{ن}$ بر $-$ $\frac{ن(ن-1)}{1\times 2}$ $جم^{ن-2}$ بر $جب^{2}$ بر

$+$ $\frac{ن(ن-1)(ن-2)(ن-3)}{\lfloor 4}$ $جم^{ن-4}$ بر $جب^{4}$ بر $-$ . . . . . .

جب ن بر $=$ ن $جم^{ن-1}$ بر جب بر $-$ $\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{\lfloor 3}$ $جم^{ن-3}$ بر $جب^{3}$ بر

$+$ $\frac{ن(ن-1)(ن-2)(ن-3)(ن-4)}{\lfloor 5}$ $جم^{ن-5}$ بر $جب^{5}$ بر $-$ . . . . . .

(۲۷۰) صورت قانونی دفعہ گذشتہ کی خواہ ن طاق ہو خواہ جفت ہو سب صورتون پر جاوی ہے مگر دو صورتون مین بائین طرف کے جملہ کے آخر رقم مختلف ہوگی اور ان صورتون مین تمیز کرنی بہت ضرور ہے

اگر ن جفت ہو تو آخر رقم صورت منفصلہ

$[$جم بر $+ \sqrt{-1}$ جب بر$]^{ن}$

کی ممکن ہے یعنی $(-1)^{\frac{ن}{2}}$ $جب^{ن}$ بر ہوگی اور آخر رقم ایک صورت مین ناممکن ہوگی یعنی $(-1)^{\frac{ن-2}{2}}$ جم بر $جب^{ن-1}$ بر

اور اسکو اسطرح لکھہ سکتے ہین $\sqrt{-1}$ ن $(-1)^{\frac{ن-2}{2}}$ جم بر $جب^{ن-1}$ بر پس جب ن جفت ہی

تو آخر رقم ن بر کی $(-1)^{\frac{ن}{2}}$ $جب^{ن}$ بر ہے

اور آخر رقم جب ن بر کی ن $(-1)^{\frac{ن-2}{2}}$ جم بر $جب^{ن-1}$ بر ہے

اور اگر ن طاق ہو تو آخر رقم صورت منفصلہ $[$جم بر $+ \sqrt{-1}$ جب بر$]^{ن}$ کی ناممکن ہوگی یعنی $(-1)^{\frac{ن}{2}}$ $جب^{ن}$ بر

جسکو اسطرح لکھہ سکتے ہین

$\sqrt{-1}$ $(-1)^{\frac{ن-1}{2}}$ $جب^{ن}$ بر

اور ایک صورت مین صرف ایک آخر رقم ممکن ہوگی یعنی

ن $(-1)^{\frac{ن-1}{2}}$ جم بر $جب^{ن-1}$ بر

پس جب ن طاق ہے تو

آخر رقم جم ن بر کی ن (–۱)^(ن–۱)/۲ جم بر جب^(ن–۱) بر ہے

اور آخر رقم جب ن بر کی (–۱)^(ن–۱)/۲ جب^ن بر ہے

(۲۷۱) جب ن بر اور جم ن بر کے صور قانونیہ سے ہم مس ن بر کی ایک جملہ جسمین قوا مس بر کے ہون مستنبط کرتے ہین تو =

مس ن بر = جب ن بر / جم ن بر

= [ن جم^(ن–۱) بر جب بر – ن(ن–۱)(ن–۲)/۳! جم^(ن–۳) بر جب^۳ بر + . . .] / [جم^ن بر – ن(ن–۱)/(۱×۲) جم^(ن–۲) بر جب^۲ بر + ...]

اب اس جملہ کے شمار کنندہ اور نسب نما کو جم^ن بر پر تقسیم کرو تو مس ن بر کے واسطے یہہ جملہ حاصل ہوگا کہ

ن مس بر – ن(ن–۱)(ن–۲)/۳! مس^۳ بر + ن(ن–۱)(ن–۲)(ن–۳)(ن–۴)/۵! مس^۵ بر
____
۱ – ن(ن–۱)/(۱×۲) مس^۲ بر + ن(ن–۱)(ن–۲)(ن–۳)/۴! مس^۴ بر – . . . . . .

(۲۷۲) اگر ن جفت ہو تو آخر رقم مس ن بر کے شمار کنندہ کی ن (–۱)^(ن–۲)/۲ مس^(ن–۱) بر ہے اور آخر رقم نسب نما کی (–۱)^(ن/۲) مس^ن بر ہے اگر ن طاق ہو تو آخر رقم شمار کنندہ کی (–۱)^(ن–۱)/۲ مس^ن بر ہے اور نسب نما کی ن (–۱)^(ن–۱)/۲ مس^(ن–۱) بر ہے

یہہ نتائج دفعہ ۲۷۰ سے قائم ہوتے ہین

(۲۷۳) زاویئے جو آپسمین برابر نہ ہون اونکے مجموعہ کے جیب اور جیب التمام اور مماس کے واسطے صور قانونیہ عامہ حاصل ہوسکتے ہین

دفعہ ۲۶۷ مین ہم لکہہ آئے ہین کہ

[جم سہ + √(–۱) جب سہ] [جم صہ + √(–۱) جب صہ] [جم لہ + √(–۱) جب لہ] . . .
= جم (سہ + صہ + لہ + . . .) + √(–۱) جب (سہ + صہ + لہ + ...)

اب جم سہ + √(–۱) جب سہ = جم سہ [۱ + √(–۱) مس سہ] . . . .
جم صہ + √(–۱) جب صہ = جم صہ [۱ + √(–۱) مس صہ] . . . .

پس اسے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جم سہ جم صہ جم لہ . . . [۱ + √(–۱) مس سہ] [۱ + √(–۱) مس صہ] [۱ + √(–۱) مس لہ] . . .
= جم (سہ + صہ + لہ + . . .) + √(–۱) جب (سہ + صہ + لہ + . . .)

فرض کرو کہ ص_۱ تو مجموعہ مس سہ + مس صہ + مس لر + ... کو تعبیر کرتا ہے اور دو دو ماسون کے حاصل ضربکے مجموعہ کو ص_۲ تعبیر کرتا ہے اور تین تین ماسون کے حاصل ضربون کے مجموعہ کو ص_۳ تعبیر کرتا ہے اور علی ہذا القیاس تو ۱ + (۱-)^{۱/۲} مس سہ اور ۱ + (۱-)^{۱/۲} مس صہ اور ۱ + (۱-)^{۱/۲} مس لر ... اجزاء ضربی کو باہم ضرب دینے اور ممکن اور ناممکن اجزار کو مساوی کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جم (سہ + صہ + لر + ...) = جم سہ جم صہ جم لر ... [۱ - ص_۲ + ص_۴ - ص_۶ + ...]

جب (سہ + صہ + لر + ...) = جم سہ جم صہ جم لر ... [ص_۱ - ص_۳ + ص_۵ - ص_۷ + ...]

اور تقسیم کرنے سے

مس (سہ + صہ + لر + ...) = (ص_۱ - ص_۳ + ص_۵ - ص_۷ + ...) / (۱ - ص_۲ + ص_۴ - ص_۶ + ...)

اگر ن طاق ہو تو آخر رقم شمار کنندہ مین (۱-)^{(ن-۱)/۲} ص_ن اور آخر رقم نسب نما مین (۱-)^{ن/۲} ص_ن ہوگی اگر ن طاق ہو تو آخر رقم شمار کنندہ کی (۱-)^{(ن-۱)/۲} ص_ن اور آخر رقم نسب نما کی (۱-)^{(ن-۱)/۲} ص_{ن-۱} ہے اگر زاوئے سہ اور صہ ... سب آپس مین برابر ہون تو یہہ قانون بہ مطابق دفعہ ۲۷۱ کے ہو جائینگے

(۲۷۴) جب سہ اور جم سہ کو سہ کی قوا کے سلسلہ مین پھیلاکر اب ہم لکھتے ہین جب ن مثبت صحیح ہو تو یہہ ہمکو حاصل ہوتا ہے کہ

جم ن بر = جم^ن بر - [ن (ن-۱) / ۱×۲] جم^{ن-۲} بر جب^۲ بر

+ [ن (ن-۱) (ن-۲) (ن-۳) / لـ۴] جم^{ن-۴} بر جب^۴ بر - ...

فرض کرو کہ ن بر = سہ اور ن بے حد و نہایت بڑہے اور بر ایسا بدلے کہ ن مثبت صحیح رہے اور ن ہمیشہ برابر سہ کے ہو تو بر کا بے حد و نہایت گھٹنا چاہئیگے پس مساوات گذشتہ اسطرح لکھی جاسکتی ہے کہ

جم سہ = جم^ن بر - [سہ (سہ - بر) / ۱×۲] جم^{ن-۲} بر (جب بر / بر)^۲

+ [سہ (سہ - بر) (سہ - ۲بر) (سہ - ۳بر) / لـ۴] جم^{ن-۴} بر (جب بر / بر)^۴ - ...

اب جس وقت ن بے حد و نہایت زیادہ ہوتا ہے اور اسواسطے بر بے حد و نہایت کم ہوتا ہے تو جب بر / بر برابر

واحد کے ہے اور ایسی ہی ہر ایک قوت جب بر سے $\left(\frac{\text{جب بر}}{\text{بر}}\right)^{\text{ن}}$ تک برابر واحد کے ہے اور جم بر بھی برابر واحد کے ہے اور ایسے ہی ہر ایک قوت جم بر سے لیکر جم$^{\text{ن}}$ بر تک۔ سو جب دفعہ ۱۰ ا کے وہ ہے پس اس آخری نتیجے اوپر کی صورت یہہ ہوگی کہ

$$\text{جم سہ} = 1 - \frac{\text{سہ}^2}{2\times 1} + \frac{\text{سہ}^4}{\lfloor 4} - \frac{\text{سہ}^6}{\lfloor 6} + \ldots \text{ہے}$$

اور نیز

$$\text{جب ن بر} = \text{ن جم}^{\text{ن}-1}\text{بر جب بر} - \frac{\text{ن(ن}-1)(\text{ن}-2)}{\lfloor 3}\,\text{جم}^{\text{ن}-3}\text{بر جب}^3\text{بر} + \ldots$$

$$\text{پس جب سہ} = \text{سہ جم}^{\text{ن}-1}\text{بر}\,\frac{\text{جب بر}}{\text{بر}} - \frac{\text{سہ}(\text{سہ}-\text{بر})(\text{سہ}-2\text{بر})}{\lfloor 3}\,\text{جم}^{\text{ن}-3}\text{بر}\left(\frac{\text{جب بر}}{\text{بر}}\right)^3 + \ldots$$

اسے معلوم ہوا کہ ن کو بے حد و نہایت بڑہائیں تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{جب سہ} = \text{سہ} - \frac{\text{سہ}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{سہ}^5}{\lfloor 5} - \frac{\text{سہ}^7}{\lfloor 7} + \ldots$$

اس دفعہ کے نتائج عظیمہ بڑی کام کے ہیں اب آگے تین دفعوں میں اونکی کیفیت لکھینگے

(۲۷۵) جب سہ اور جم سہ کی جو صور مفصلہ لکھی ہیں اونمیں اس بات کا خیال رکھنا چاہیے کہ یہہ مقیاس قوسی زاویہ کا ہے اسلئے کہ بر کے بحد و نہایت کم ہونے سے $\frac{\text{جب بر}}{\text{بر}}$ کا واحد ہونا اوس صورت پر موقوف ہے کہ زاویہ کا اندازہ مقیاس قوسی سے کیا جاے مگر جب کوئی اور پیمانہ واحد زاویوں کے اندازہ کرنیکے مقرر کیا جاے تو ان صور قانونیہ کی ترمیم ہوسکتی ہے مثلاً

$$\text{جب ن} = \text{سہ} - \frac{\text{سہ}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{سہ}^5}{\lfloor 5} - \ldots\ldots$$

اسمیں سہ مقیاس قوسی ن° کا ہی پس سہ $= \frac{\text{ن کہ}}{180}$ اور اس سبب سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جب ن}^\circ = \frac{\text{ن کہ}}{180} - \frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{\text{ن کہ}}{180}\right)^3 + \frac{1}{\lfloor 5}\left(\frac{\text{ن کہ}}{180}\right)^5 - \ldots\ldots$$

$$\text{اور ایسی ہی جم ن}^\circ = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ن کہ}}{180}\right)^2 + \frac{1}{\lfloor 4}\left(\frac{\text{ن کہ}}{180}\right)^4 - \ldots\ldots$$

(۲۷۶) جب سہ اور جم سہ کے سلسلہ انتظامی سہ کی سب قیمتوں کے واسطے ہیں جب سہ کے سلسلہ کی ن وین رقم $(-1)^{\text{ن}-1}\frac{\text{سہ}^{2\text{ن}-1}}{\lfloor 2\text{ن}-1}$ ہے اسے معلوم ہوا کہ عددی قیمت نسبت (ن + ۱) وین رقم اور ن وین رقم کی $\frac{\text{سہ}^2}{2\text{ن}(2\text{ن}+1)}$ ہے خواہ سہ کی کچھہ ہی قیمت ہوں ن کو ایسا بڑا مقرر کرسکتے ہیں کہ ن اس قیمت کے واسطے اور اوس سے بڑی قیمتوں کے واسطے

اگر س زاویہ منفرجہ ہو تو متصل کے تیسرے ضلع کے واسطے سہج سا جملہ حاصل ہو سکتا ہے

فرض کرو کہ (کہ - بر) مقیاس قوسی زاویہ س کا ہو اور بر نہایت چھوٹا ہو تو

طس² = طا² + طب² + ۲ طاطب جم س = طا² + طب² + ۲ طاطب جم بر

= طا² + طب² + ۲ طاطب (۱ - بر²/۲) کے تقریباً

= (طا + طب)² - طاطب بر²

= (طا + طب)² | ۱ - طاطب بر² / (طا + طب)² |

اب جذر نکالنے سے طس = (طا + طب) [۱ - طاطب بر² / ۲ (طا + طب)²] تقریباً

مثالین

(۱) جذر جم ۱/۲ ± ۱/۲ (-۱) جب ۱/۲ کا نکالو

(۲) قیمت (-۱)^{۱/۳} کی دریافت کرو

(۳) (-۱)^{۱/۶} کی چھہ قیمتیں حاصل کرو

(۴) تین قیمتیں ۱+ | ۱/۲ (-۱) |^{۱/۳} کی حاصل کرو

(۵) معلوم ہے کہ جب بر / بر = ۶۵/۶۶ ۲۱/۲۱ تو ثابت کرو کہ بر تقریباً مقیاس قوسی ۱۰° کا ہے

(۶) معلوم ہے کہ جب (کہ/۶ + بر) = ۰۱ء۵ تو تقریباً قیمت بر کی دریافت کرو اور بر کی دوسری قوت سے آگے کی قوتوں کو چھوڑ دو

(۷) اگر مس لا = لا + ط۳ لا³/|۳ + ط۵ لا⁵/|۵ + ... تو ثابت کرو کہ

ط۲ن+۱ = (۲ن+۱) ۲ن / |۲ × ۱ ط۲ن-۱ - (۲ن+۱) ۲ن (۲ن-۱) (۲ن-۲) / |۴ ط۲ن-۳ + ...

(۸) اگر بر مم بر = ط۰ + ط۲ بر² + ط۴ بر⁴ + ... تو ثابت کرو کہ

ط۲ن = ط۲ن-۲ / |۳ - ط۲ن-۴ / |۵ + ... + (-۱)^{ن-۱} ط۰ / |۲ن+۱ + (-۱)^ن / |۲ن

اسے بر مم بر کو چار رقموں تک دریافت کرو

(۹) اگر قط بر = ط۰ + ط۲ بر² + ط۴ بر⁴ + ... ط۲ن بر^{۲ن} + ... تو ثابت کرو کہ

ط۲ن = ط۲ن-۲ / |۲ - ط۲ن-۴ / |۴ + ... + (-۱)^{ن-۱} ط۰ / |۲ن

(۱۰) اگر جم ۲ سہ + $\sqrt{-1}$ جب ۲ سہ کو طا کی جگہہ اس جملہ (طا + طب) (طا + طس) میں رکھیں اور اسی کے مشابہ مقادیر طب اور طس کی جگہہ رکھیں اور نتیجہ کو ا + ب $\sqrt{-1}$ کی صورت میں تحویل کریں تو ا اور ب کی قیمتیں سہ او صہ اور رہ کی رقموں میں دریافت کرو

(۱۱) ثابت کرو کہ

$$\left\{\text{جم بر} + \text{جم سر} + \sqrt{-1}\,(\text{جب بر} + \text{جب سر})\right\}^{\text{ن}} + \left\{\text{جم بر} + \text{جم سر} - \sqrt{-1}\,(\text{جب بر} + \text{جب سر})\right\}^{\text{ن}} = ۲^{\text{ن}+۱}\left(\text{جم}\,\frac{\text{بر} - \text{سر}}{۲}\right)^{\text{ن}} \text{جم}\,\frac{\text{ن}\,(\text{بر} + \text{سر})}{۲}$$

(۱۲) اگر $\text{لا} = \text{ی}^{\sqrt{-1}}$ اور $\sqrt{-1}\,(۱ - \text{ح}^۲) = \text{ن ح} - ۱$ تو ثابت کرو کہ

$$۱ + \text{ح جم بر} = \frac{\text{ح}}{۲\,\text{ن}}\,(۱ + \text{ن لا})\left(۱ + \frac{\text{ن}}{\text{لا}}\right)$$

(۱۳) ایک قوس جو در نہایت چھوٹی ہے اوسکے طول دریافت کرنے کے لئے یہہ قاعدہ ثابت کرو کہ اگر نصف قوس کے وتر کے آٹھہ گنی میں سے وتر کل قوس کا طول تفریق کریں تو حاصل تفریق کی ایک تہائی برابر طول قوس کے ہوگی

(۱۴) اس مساوات متطابقہ سے

$$\frac{(\text{لا} - \text{ص})(\text{لا} - \text{ح})}{(\text{ط} - \text{ص})(\text{ط} - \text{ح})} + \frac{(\text{لا} - \text{ح})(\text{لا} - \text{ط})}{(\text{ص} - \text{ح})(\text{ص} - \text{ط})} + \frac{(\text{لا} - \text{ط})(\text{لا} - \text{ص})}{(\text{ح} - \text{ط})(\text{ح} - \text{ص})} = \text{ایک}$$

لا = ۲ جم ۲ بر + $\sqrt{-1}$ جب ۲ بر کے فرض کرکے یہہ نتائج مستنبط کرو کہ

$$\frac{\text{جب}\,(\text{بر} - \text{صہ})\,\text{جب}\,(\text{بر} - \text{لہ})}{\text{جب}\,(\text{سہ} - \text{صہ})\,\text{جب}\,(\text{سہ} - \text{لہ})}\,\text{جب}\,۲\,(\text{بر} - \text{سہ}) + \frac{\text{جب}\,(\text{بر} - \text{لہ})\,\text{جب}\,(\text{بر} - \text{سہ})}{\text{جب}\,(\text{صہ} - \text{لہ})\,\text{جب}\,(\text{صہ} - \text{سہ})}\,\text{جب}\,۲\,(\text{بر} - \text{صہ}) + \frac{\text{جب}\,(\text{بر} - \text{سہ})\,\text{جب}\,(\text{بر} - \text{صہ})}{\text{جب}\,(\text{لہ} - \text{سہ})\,\text{جب}\,(\text{بر} - \text{صہ})}\,\text{جب}\,۲\,(\text{بر} - \text{لہ}) = ۰$$

بیسواں باب

صورت مفصلہ بعض علم مثلثی جملوں کی

(۲۷۹) فرض کرو کہ جم بر + $\sqrt{-1}$ جب بر کو لا تعبیر کرتا ہے تو

$$\frac{۱}{\text{لا}} = \frac{۱}{\text{جم بر} + \sqrt{-1}\,\text{جب بر}} = \text{جم بر} - \sqrt{-1}\,\text{جب بر}$$

پس $\text{لا} + \frac{١}{\text{لا}} = ٢\,\text{جم بر}$ اور $\text{لا} - \frac{١}{\text{لا}} = ٢\sqrt{-١}\,\text{جب بر}$

اور نیز $\text{لا}^{\text{ن}} = \left[\text{جم بر} + \sqrt{(-١)}\,\text{جب بر}\right]^{\text{ن}} = \text{جم ن بر} + \sqrt{(-١)}\,\text{جب ن بر}$

$\frac{١}{\text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{١}{\left[\text{جم بر} + \sqrt{(-١)}\,\text{جب بر}\right]^{\text{ن}}} = \frac{١}{\text{جم ن بر} + \sqrt{(-١)}\,\text{جب ن بر}}$

$= \text{جم ن بر} - \sqrt{(-١)}\,\text{جب ن بر}$

پس $\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{١}{\text{لا}^{\text{ن}}} = ٢\,\text{جم ن بر}$ اور $\text{لا}^{\text{ن}} - \frac{١}{\text{لا}^{\text{ن}}} = ٢\sqrt{-١}\,\text{جب ن بر}$

یہ طریقہ ثابت تحقیقات آئندہ میں بڑا کارآمد ہے

(۸۰) $\text{جم}^{\text{ن}}$ بر کو اضعاف بر کی جیب التماموں کی رقموں میں بیان کرو اور ثابت صحیح ہے

$٢^{\text{ن}}\,\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{بر} = \left(\text{لا} + \frac{١}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-١}\,\frac{١}{\text{لا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{١\times٢}\,\text{لا}^{\text{ن}-٢}\,\frac{١}{\text{لا}^{٢}} + \cdots$

$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{١\times٢}\,\text{لا}^{٢} \cdot \frac{١}{\text{لا}^{\text{ن}-٢}} + \text{ن}\,\text{لا}\,\frac{١}{\text{لا}^{\text{ن}-١}} + \frac{١}{\text{لا}^{\text{ن}}}$

اب دائیں طرف کی رقموں کو دوبارہ اس طرح مرتب کرکے لکھو کہ اول اور اخر رقم اکٹھی ہوں اور دوسری رقم اول اور دوسری رقم اخر سے ایک جا ہوں علی ہذا القیاس تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{١}{\text{لا}^{\text{ن}}} + \text{ن}\left(\text{لا}^{\text{ن}-٢} + \frac{١}{\text{لا}^{\text{ن}-٢}}\right) + \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{١\times٢}\left(\text{لا}^{\text{ن}-٤} + \frac{١}{\text{لا}^{\text{ن}-٤}}\right) + \cdots$

لیکن $\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{١}{\text{لا}^{\text{ن}}} = ٢\,\text{جم ن بر}$ اور $\text{لا}^{\text{ن}-٢} + \frac{١}{\text{لا}^{\text{ن}-٢}} = ٢\,\text{جم}\,(\text{ن}-٢)\,\text{بر}$ اور علی ہذا القیاس

اسی واسطے

$٢^{\text{ن}-١}\,\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{بر} = \text{جم ن بر} + \text{ن}\,\text{جم}\,(\text{ن}-٢)\,\text{بر} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{١\times٢}\,\text{جم}\,(\text{ن}-٤)\,\text{بر} + \cdots$

$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+١)}{|\text{ر}}\,(\text{ن}-٢\text{ر})\,\text{بر} + \cdots$

بائیں طرف جو جملہ واقع ہی اوسکی اخر رقم کی مختلف صورتیں ن کی جفت اور طاق ہونے سے ہونگیں صورت مفصلہ $\left(\text{لا} + \frac{١}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$ میں بموجب ضابطہ جملہ ثنائی کے ن + ١ رقمیں ہیں پس جب کہ ن جفت ہی تو ایک رقم متوسط ہوگی یعنی $\left(\frac{\text{ن}}{٢} + ١\right)$ ویں رقم اور وہ یہہ ہوگی کہ

$\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)\cdots(\text{ن}-\frac{١}{٢}\text{ن}+١)}{|\frac{١}{٢}\text{ن}}\,\text{لا}^{\frac{\text{ن}}{٢}} \cdot \frac{١}{\text{لا}^{\frac{\text{ن}}{٢}}}$ یعنی $\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)\cdots(\frac{١}{٢}\text{ن}+١)}{|\frac{١}{٢}\text{ن}}$

پس اسسے معلوم ہوا کہ جب ن جفت ہو تو اخر رقم $٢^{\text{ن}-١}\,\text{جم}^{\text{ن}}$ بر کی

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)\ \cdots\ (\frac{۱}{۲}\text{ن}+۱)}{\lfloor\frac{۱}{۲}\text{ن}}$$ ہوگی

اور جب ن طاق ہو تو اوسکو = ۲م + ۱ کے فرض کرو تو دو ارقام متوسط صورت مفصلہ $(\text{لا}+\frac{۱}{\text{لا}})^{\text{ن}}$ ہونگیں یعنی (م + ۱) ویں رقم اور (م + ۲) ویں رقم اور اونکا مجموعہ

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)\ \cdots\ (\text{ن}-\text{م}+۱)}{\lfloor\text{م}}\ (\text{لا}+\frac{۱}{\text{لا}})$$

اسسے معلوم ہوا کہ جب ن طاق ہو تو اخر رقم $۲^{\text{ن}-۱}$ جم^ن بر کی

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)\ \cdots\ \frac{۱}{۲}(\text{ن}+۳)}{\lfloor\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)}$$ جم بر ہوگی

(۲۸۱) اگر ن جفت صحیح ہو تو جب^ن بر اضعاف بر کی جیب التماموں کے ارقام میں پہیل سکتی ہی اور اگر ن طاق مثبت صحیح ہو تو جب^ن بر اضعاف بر کے جوب میں پہیل سکتی ہی اب ہم ان باتوں کا ذکر دو آگے کی دفعات میں کرینگے

(۲۸۲) اضعاف بر کی جیب التماموں کی رقموں میں جب^ن بر کو رقموں میں پہیلاؤ اور ن جفت مثبت صحیح ہے

$$۲^{\text{ن}}(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\ \text{جب}^{\text{ن}}\ \text{بر}=(\text{لا}-\frac{۱}{\text{لا}})^{\text{ن}}=\text{لا}^{\text{ن}}-\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}+\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}\text{لا}^{\text{ن}-۲}\frac{۱}{\text{لا}^۲}\ \cdots$$

$$+\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}\text{لا}^۲\cdot(-\frac{۱}{\text{لا}})^{\text{ن}-۲}+\text{ن}\,\text{لا}(-\frac{۱}{\text{لا}})^{\text{ن}-۱}+(-\frac{۱}{\text{لا}})^{\text{ن}}$$

اب بائیں طرف کی ارقام کو اسطرح ترتیب دو کہ اول اور اخر رقم ایک جگہہ ہو اور اول سے دوسری رقم اور آخر سے صرف دوسری رقم ایک جگہہ ہوں اور علی ہذا القیاس تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$(\text{لا}^{\text{ن}}+\frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}})-\text{ن}(\text{لا}^{\text{ن}-۲}+\frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۲}})+\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}(\text{لا}^{\text{ن}-۴}+\frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۴}})\ \cdots$$

$$+(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)\ \cdots\ (\frac{۱}{۲}\text{ن}+۱)}{\lfloor\frac{۱}{۲}\text{ن}}$$

اسواسطے

$$۲^{\text{ن}-۱}(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\ \text{جب}^{\text{ن}}\ \text{بر}=\text{جم ن بر}-\text{ن جم}(\text{ن}-۲)\,\text{بر}+\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}\text{جم}(\text{ن}-۴)\,\text{بر}-\cdots$$

$$+(-۱)^{\text{ر}}\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)\ \cdots\ (\text{ن}-\text{ر}+۱)}{\lfloor\text{ر}}\text{جم}(\text{ن}-۲\text{ر})\,\text{بر}$$

$$+(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)\ \cdots\ (\frac{۱}{۲}\text{ن}+۱)}{۲\lfloor\frac{۱}{۲}\text{ن}}$$

(۲۸۳) جب^ن بر کو اضعاف بر کے جوب کے ارقام میں پہیلاؤ اور ن طاق مثبت صحیح ہے

$$۲^{\text{ن}}(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\ \text{جب}^{\text{ن}}\ \text{بر}=(\text{لا}-\frac{۱}{\text{لا}})^{\text{ن}}=\text{لا}^{\text{ن}}-\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\cdot\frac{۱}{\text{لا}}+\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}\text{لا}^{\text{ن}-۲}\cdot\frac{۱}{\text{لا}^۲}$$

اب بائیں طرف کی ارقام اسطرح مرتب کرو کہ اول اور آخر رقم یکجا ہو اور اول سے دوسری رقم اور آخر سے صرف دوسری رقم ایک جگہہ ہوں اور علی ہذا القیاس تو یہہ حاصل ہوگا کہ

(لد^ن - ۱/لد^ن) - ن (لد^{ن-۲} - ۱/لد^{ن-۲}) + ن(ن-۱)/۱×۲ (لد^{ن-۴} - ۱/لد^{ن-۴}) - ......

+ (-۱)^{(ن-۱)/۲} ن(ن-۱)...۱/۲(ن+۳) / ۱/۲(ن-۱)| (لد - ۱/لد)

لیکن لد^ن - ۱/لد^ن = ۲ √-۱ جب ن بر

لد^{ن-۲} - ۱/لد^{ن-۲} = ۲ √-۱ جب (ن-۲) بر

اور علی ہذا القیاس اسی واسطے

۲^{ن-۱} (-۱)^{(ن-۱)/۲} جب^ن بر = جب ن بر - ن جب (ن-۲) بر + ن(ن-۱)/۱×۲ جب (ن-۴) بر - ن(ن-۱)(ن-۲)/۳| جب (ن-۶) بر + ... + (-۱)^{(ن-۱)/۲} ن(ن-۱)...۱/۲(ن+۳) / ۱/۲(ن-۱)|

(۲۸۴) اگر ن مثبت صحیح ہو تو جم^ن بر اور جب^ن بر کو جو بالتمام اور جو بین پھیلانا دشوار ہو جاتا ہے اس بات کے دریافت کرنے کے واسطے پی کوک کے جبر مقابلہ کے دوسری جلد کو دیکھنا چاہئے

(۲۸۵) دفعہ ۲۶۹ سے ثابت ہوا ہے کہ جب ن مثبت صحیح ہو تو

جم ن بر = جم^ن بر - ن(ن-۱)/۱×۲ جم^{ن-۲} بر جب^۲ بر

+ ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)/۴| جم^{ن-۴} بر جب^۴ بر - ....

چونکہ جب^۲ بر = ۱ - جم^۲ بر   جب^۴ بر = (۱ - جم^۲ بر)^۲

اور علی ہذا القیاس اور یہہ بھی ظاہر ہے کہ جم ن بر کو قواء جم بر کی ارقام میں بیان کر سکتے ہیں اب ہم اس جملہ کی تحقیقات بلا واسطہ کرتے ہیں

(۲۸۶) جب ن مثبت صحیح ہو تو جم ن بر کو جم بر کی قواء متنازلہ کے سلسلہ میں بیان کرو

فرض کرو کہ لد = جم بر + √-۱ جب بر

پس لد + ۱/لد = ۲ جم بر اور لد^ن + ۱/لد^ن = ۲ جم ن بر

اب (۱−ی لا) (۱− ی/لا) = ۱−ی (لا + ۱/لا) + ی۲ = ۱ − ی (ح − ی)

اسمین ح = ۲ جم بر

دونو ارکان مساوات کی لوگارثم لو تو

لوگ (۱−ی لا) + لوگ (۱− ی/لا) = لوگ [۱−ی (ح − ی)]

ابسوا سطے ی لا + ½ ی۲ لا۲ + ⅓ ی۳ لا۳ + ... + ی/لا + ½ ی۲/لا۲ + ⅓ ی۳/لا۳ + ...

= ی (ح−ی) + ½ ی۲ (ح − ی)۲ + ⅓ ی۳ (ح − ی)۳ + ... + ۱/ن ین (ح − ی)ن + ...

اس منطابقہ مین امثال ین کے مساوی لکھو دائین طرف تو امثال ین کے ۱/ن (لان + ۱/لان) ہین

اور بائین طرف ین کے امثال صورت مفصلہ ۱/ن ین (ح − ی)ن سے اور اوسکے ماقبل کی قرنون

کی صورت مفصلہ سے منتخب ہو کر حاصل ہو سکتی ہین

امثال ین کی ۱/ن ین (ح − ی)ن مین حن/ن ہین

امثال ین کی ین−۱ (ح − ی)ن−۱ / (ن − ۱) مین − ۱/(ن−۱) (ن − ۲) حن−۲ ہین

امثال ین کی ین−۲ (ح − ی)ن−۲ / (ن − ۲) مین ۱/(ن−۲) · (ن − ۳) (ن − ۴) / (۱×۲) حن−۴ ہین

اور بالعموم امثال ین کی ۱/(ن − ر) ین−ر (ح − ی)ن−ر مین

(−۱)ر/(ن − ر) · (ن − ر) (ن − ر − ۱) ... (ن − ۲ ر + ۱) / ر! · حن−۲ر

پس ۲ جم ن بر = (۲ جم بر)ن − ن (۲ جم بر)ن−۲ + ن (ن − ۳)/(۱×۲) (۲ جم بر)ن−۴ − ...

+ (−۱)ر ن (ن − ر − ۱) (ن − ر − ۲) ... (ن − ۲ ر + ۱) / ر! (۲ جم بر)ن−۲ر + ..

سلسلہ بائین طرف کا جب تک جاری رہیگا کہ ۲ جم بر کے قوا منفی ہونے شروع ہون

(۲۸۷) یہہ بات اوپر کی دفعہ سے یا دفعہ ۲۶۹ سے ظاہر ہے کہ جبان نسبت صحیح ہو تو

جم ن بر کو قوا جب بر کے سلسلہ مین ترتیب دے سکتے ہین اس صورت مین ہم یہہ فرض

کر سکتے ہین

جم ن بر = ۱ + ا۲ جب۲ بر + ا۴ جب۴ بر + ا۶ جب۶ بر + .. + ان جبن بر

اب یہہ ظاہر ہے کہ اول رقم واحد ہو کیونکہ جسوقت بر = ۰ تو جب بر = ۰ اور جم ن بر = ۱

اب ایک ترکیب بلا واسطہ امثال ا۲ اور ا۴ ... کی قیمت دریافت کرنیکی لکھتے ہین بر کو بر + ھ سے بدل دو تو جم ن بر کی یہہ صورت ہو جائیگی کہ

جم ن بر جم ن ھ − جب ن بر جب ن ھ

اب جم ن ھ اور جب ن ھ کی قیمتین ارقام ن ھ مین بموجب دفعہ ۲۷۴ کے رکھو تو اوپر کے جملہ کی یہہ صورت ہو جائیگی کہ

جم ن بر − ن ھ جب ن بر − (ن۲ ھ۲ / ۲) جم ن بر + وغیرہا

اب رقم ا۲ر جب۲ر بر مین بر کو بر + ھ سے بدلو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ا۲ر (جب بر جم ھ + جم بر جب ھ)۲ر یعنی

ا۲ر (جب بر + ھ جم بر − (ھ۲ / ۲) جب بر −)۲ر

اگر اسکی صورت مفصلہ خواہ ھ مین لکھین تو رقم جسمین ھ۲ شامل ہو یہہ ہوگی کہ

ا۲ر [۲ر (۲ر − ۱) / (۱×۲) جب۲ر−۲ بر − ر جب۲ر بر] ھ۲

ھ۲ کے امثال برابر لکھو

− (ن۲ / ۲) جم ن بر = ا۲ [جم۲ بر − جب۲ بر] + ا۴ [۴×۳ جب۲ بر جم۲ بر − ۲ جب۴ بر]

+ ... + ا۲ر [۲ر (۲ر − ۱) / (۱×۲) جب۲ر−۲ بر جم۲ بر − ر جب۲ر بر] + ...

اب ۱ − جب۲ بر کو جم۲ بر کی جگہہ بائین طرف لکھو تو رقم جسمین جب۲ر بر شامل ہو یہہ ہوگی

[− ا۲ر (۲ر (۲ر − ۱) / (۱×۲) + ر) + ا۲ر+۲ (۲ر + ۲) (۲ر + ۱) / (۱×۲)]

سلسلہ جو − (ن۲ / ۲) جم ن بر کے واسطے ہے اوسمین جو امثال جب۲ر بر کے ہین یعنی − (ن۲ / ۲) ا۲ر وہ امثال مذکور کے برابر ہونی چاہئے پس

(ن۲ / ۲) ا۲ر = ۲ر۲ ا۲ر − ا۲ر+۲ (ر + ۱) (۲ر + ۱)

اسیواسطے ا۲ر+۲ = (ن۲ − (۲ر)۲) / ((۲ر + ۱) (۲ر + ۲)) ا۲ر

اب اس قانون کی استعانت سے اگر ا = ۱ کے خیال کرین تو متواتر امثال یہہ حاصل ہونگی کہ

$$\text{ا}_{۲} = -\frac{\text{ن}}{۱\times۲}\,\text{ا} = -\frac{\text{ن}}{۱\times۲}$$

$$\text{ا}_{۴} = -\frac{\text{ن}-۲}{۳\times۴}\,\text{ا}_{۲} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-۲)}{۱\times۲\times۳\times۴}$$

اور علی ہذا القیاس

اسے معلوم ہوا کہ آخرکار

$$\text{جم ن بر} = ۱ - \frac{\text{ن}}{۱\times۲}\text{جب}^{۲}\text{بر} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۲)}{|۴}\text{جب}^{۴}\text{بر} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۴)}{|۶}\text{جب}^{۶}\text{بر} + \cdots$$

اوپر کے عمل میں جو کے امثال کو برابر لکھنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے

$$-\text{ن جب ن بر} = \text{ا}_{۲}\,\text{جب بر جم بر} + \text{ا}_{۴}\,\text{جب}^{۳}\text{بر جم بر} + \cdots + \text{ا}_{۲ر}\,۲\text{ر جب}^{۲\text{ر}-۱}\text{جم بر} + \cdots$$

قیمتیں ا۲ اور ا۴ ... وغیرہ مندرج کرو تو

$$\text{جب ن بر} = \text{ن جم بر}\left[\text{جب بر} - \frac{\text{ن}-۲}{|۳}\text{جب}^{۳}\text{بر} + \frac{(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۴)}{|۵}\text{جب}^{۵}\text{بر} - \cdots\right]$$

جب ن طاق ہو تو ہم یہہ فرض کرکے آگے حل کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جب ن بر} = \text{ا}_{۱}\,\text{جب بر} + \text{ا}_{۳}\,\text{جب}^{۳}\text{بر} + \text{ا}_{۵}\,\text{جب}^{۵}\text{بر} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{جب}^{\text{ن}}\text{بر}$$

اور موافق سابق کے عمل کرنے سے ہمکو یہہ دریافت ہوتا ہے کہ

$$\text{جب ن بر} = \text{ن جب بر} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^{۲}-۱)}{|۳}\text{جب}^{۳}\text{بر} + \frac{\text{ن}(\text{ن}^{۲}-۱)(\text{ن}^{۲}-۳^{۲})}{|۵}\text{جب}^{۵}\text{بر} - \cdots$$

$$\text{جم ن بر} = \text{جم بر}\left[۱ - \frac{\text{ن}^{۲}-۱}{۱\times۲}\text{جب}^{۲}\text{بر} + \frac{(\text{ن}^{۲}-۱)(\text{ن}^{۲}-۳^{۲})}{|۴}\text{جب}^{۴}\text{بر} - \cdots\right]$$

حاصل ہوگا

(۲۸۸) دفعہ گذشتہ میں جو چار صورتوں کا نتیجہ حاصل ہوتی ہیں ان میں جب کی بجائے جم بر لکھو تو اگر ن جفت صحیح عدد ہو تو یہہ

$$(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\text{جم ن بر} = ۱ - \frac{\text{ن}^{۲}}{۲}\text{جم}^{۲}\text{بر} + \frac{\text{ن}^{۲}(\text{ن}^{۲}-۲^{۲})}{|۴}\text{جم}^{۴}\text{بر} - \cdots$$

$$(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}+۱}\text{جب ن بر} = \text{ن جب بر}\left[\text{جم بر} - \frac{\text{ن}^{۲}-۲^{۲}}{|۳}\text{جم}^{۳}\text{بر} + \frac{(\text{ن}^{۲}-۲^{۲})(\text{ن}^{۲}-۴^{۲})}{|۵}\text{جم}^{۵}\text{بر} - \cdots\right]$$

اگر ن طاق صحیح عدد ہو

$$(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\text{جم ن بر} = \text{ن جم بر} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^{۲}-۱)}{|۳}\text{جم}^{۳}\text{بر} + \frac{\text{ن}(\text{ن}^{۲}-۱)(\text{ن}^{۲}-۳^{۲})}{|۵}\text{جم}^{۵}\text{بر} - \cdots$$

$$(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\text{جب ن بر} = \text{جب بر}\left[۱ - \frac{\text{ن}^{۲}-۱}{۱\times۲}\text{جم}^{۲}\text{بر} + \frac{(\text{ن}^{۲}-۱)(\text{ن}^{۲}-۳^{۲})}{|۴}\text{جم}^{۴}\text{بر} - \cdots\right]$$

امثلہ متفرقہ

(۱) $(\text{جب بر})^{\text{۲ن+۲}}$ کو اضعاف بر کی جوب التمام کی ارقام مین پھیلاؤ

(۲) $(\text{جب بر})^{\text{۲ن+۱}}$ کو اضعاف بر کی جوب کے ارقام مین پھیلاؤ

(۳) $(\text{جم بر})^{\text{۲ن}}$ کو اضعاف بر کی جوب التمام کے ارقام مین پھیلاؤ

(۴) کسی مثلث مین ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{طا}^2\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}-\text{س})}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{س})}+\frac{\text{طب}^2\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ا})}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{س}+\text{ا})}+\frac{\text{طس}^2\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}=2\,(\text{طاطب}+\text{طب طس}+\text{طس طا})$$

(۵) مثلث اب س کے زاویون سے عمود اد اور ب ی اور س ف مقابل کے ضلعون پر نکالے گیے ہین تو ثابت کرو کہ

طا جب (ب ا د − س ا د) + طب جب (س ب ی − ا ب ی) + طس جب (ا س ف − ب س ف) =

(۶) اس اور ب س پر ا اور ب سے عمود اد اور ب ذ مقابل کے ضلعون پر نکالو اور اب ذ مین جو دائرہ بنایا جاوے اوسکا نصف قطر ب مقرر کرو تو

اب = ب (قطا + قطب + مس ا مس ب)

(۷) تین دائرے جنمین سے ہر ایک نصف قطر ط ہے آپسمین ایک دوسرے کو مس کرتے ہین تو ثابت کرو کہ اونکی درمیان سطح برابر ہے $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)\text{ط}^2$ کے

(۸) دائرہ کے اندر جو کثیر الاضلاع منتظم بنائی جاوے اوسکا رقبہ اوسط ہندسیہ اون دو منتظم الاضلاع شکلون کے رقبون کے درمیان ہوتا ہے جنکی اضلاع کی تعداد نصف ہے پہلے شکل سے ہو اونمین ایک دائرہ کے اندر اور دوسری اوپر بنائی جاوی

(۹) ایک دائرہ کے اوپر جو کثیر الاضلاع منتظم بنائی جاوے اوسکا رقبہ اوسط موسیقیہ اون منتظم الاضلاع شکلون کے رقبون کے درمیان ہوتا ہے جنمین ایک دائرہ کے اندر بنائی جاوے اور اوسکی اضلاع کی تعداد پہلی شکل کی تعداد اضلاع کے مساوی ہو اور دوسرے دائرہ کے اوپر بنائی جاوے اور اوسکی اضلاع کی تعداد

نصف پہلی شکل کی اضلاع کی تعداد سے ہو

(۱۰) اگر دائرہ کے اندر جو مخمس بنایا جاے اوسکا ضلع ح ہو تو نصف قطر

$\frac{ح \sqrt{(۵۰ + ۱۰\sqrt{۵})}}{۱۰}$ ہو گا

(۱۱) تین دائرے جنکے نصف قطر ط ص ح ہین ایک دوسرے کو باہر کی طرف مس کرتے ہین تو ثابت کرو کہ نقاط تماس سے جو مماس نکالے جائین تو وہ ایک ایسی نقطہ پر ملتے ہین جسکا فاصلہ ان نقطون مین سے کسی نقطہ سے یہہ ہے کہ $\left(\frac{ط ص ح}{ط + ص + ح}\right)^{\frac{1}{2}}$

(۱۲) ایک ذوار بعۃ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب لین تو اونکے مقابل کے زاویے ایک دوسرے کے تکملے ہوتے ہین اور اضلاع کی مقدار ۲ و ۳ و ۴ و ۴ ہوتی ہے تو اوسکا رقبہ اور نصف قطر اون دائرون کے جو اوسکے اندر اور اوپر کھیچے جائین دریافت کرو

(۱۳) دائرہ مین ایک کثیر الاضلاع منتظم بنائی گئی ہے اور اوتنی ہی اضلاع کی منتظمۃ الاضلاع دائرہ کے اوپر بنائی گئی ہے اور اونکے رقبون مین نسبت ۳ اور ۴ کی ہے تعداد اضلاع دریافت کرو

(۱۴) اگر تین متماسہ دائرون کے نصف قطر ط و ص و ح ہون اور وتر جو نقاط تماس مین ملائے جائین وہ سہ و صہ و لہ ہون تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{سہ صہ لہ} = \left(\frac{1}{ط} + \frac{1}{ص}\right)\left(\frac{1}{ص} + \frac{1}{ح}\right)\left(\frac{1}{ح} + \frac{1}{ط}\right)$$

(۱۵) ثابت کرو کہ غایت الانتہا $\left(\frac{س}{سہ}\right)^{\frac{1}{س^2}}$ کی جب ہر بیحد نہایت ٹہی ہی ہے

(۱۶) کسی ذوار بعۃ الاضلاع کے دو قطر آپس مین برابر نہین ہو سکتے جب تک کہ مقابل کے ضلعے مساوی نہون

(۱۷) دو دائرے جنکے نصف قطر ط اور ص ہین ایک دوسرے کو زاویہ لہ پر کاٹتے ہین تو ثابت کرو کہ طول وتر مشترک کا

$\frac{۲ ط ص جب لہ}{\sqrt{(ط^2 + ۲ ط ص جم لہ + ص^2)}}$ ہے

(۱۸) مثلث مین جو دائرہ بنایا جاے اوسکا نصف قطر مثلث کی دائرہ بیرونی کے آدہی نصف قطر سے مثلث کے بڑا نہین ہوتا

اکیسوان باب

جیب اور جیب التمام کی قوت نمای قیمتین

(۲۸۹) اگر ی^{ک لا} اور ی^{-ک لا} کو موافق ضابطہ قوت نمای کی پھیلائین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\tfrac{1}{2}\left(\text{ی}^{\text{ک لا}} + \text{ی}^{-\text{ک لا}}\right) = 1 + \frac{\text{ک}^2\,\text{لا}^2}{|2} + \frac{\text{ک}^4\,\text{لا}^4}{|4} + \frac{\text{ک}^6\,\text{لا}^6}{|6} + \cdots$$

$$\frac{1}{2\,\text{ک}}\left(\text{ی}^{\text{ک لا}} - \text{ی}^{-\text{ک لا}}\right) = \text{لا} + \frac{\text{ک}^2\,\text{لا}^3}{|3} + \frac{\text{ک}^4\,\text{لا}^5}{|5} + \frac{\text{ک}^6\,\text{لا}^7}{|7} + \cdots$$

اگر یہہ ممکن ہوسکتا ہے کہ $\text{ک}^2 = -1$ کے ہو تو $\text{ک}^4 = 1$ اور $\text{ک}^6 = -1$ اور علیٰ ہذا القیاس تو بائین طرف کا رکن اول مساوات کا صورت مفصلہ جم لا کی ہوگی اور بائین طرف کا رکن دوسری مساوات کا صورت مفصلہ جب لا کی ہوگی (دفعہ ۲۷۴) تو ان سے یہہ نتائج مستنبط ہوتے ہین کہ

$$\text{جم لا} = \frac{\text{ی}^{\text{لا}\sqrt{-1}} + \text{ی}^{-\text{لا}\sqrt{-1}}}{2} \quad \text{اور} \quad \text{جب لا} = \frac{\text{ی}^{\text{لا}\sqrt{-1}} - \text{ی}^{-\text{لا}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

اب بھی سیدھے سادی ان مساواتون کے یہہ معنی ہین کہ اگر ہم ی^{√-1 لا} اور ی^{-√-1 لا} کو بموجب ضابطہ قوت نمای کے اسیطرح پھیلائین کہ گویا $\sqrt{-1}$ ایک اصل مقدار ہے تو اوپر کی صورت قانونیہ سے جم لا اور جب لا کے واسطے جملے معلوم حاصل ہونگے یہہ جملے جو جم لا اور جب لا کے واسطے ہین اونکو قیمتین قوت نمای جیب التمام اور جب کی کہتے ہین

(۲۹۰) جیب اور جیب التمام کی قوت نمای قیمتون سے اور جملون کی بھی قیمتین اسی قبیل کی مستنبط ہوسکتی ہین مثلاً

$$\text{مس لا} = \frac{\text{ی}^{\text{لا}\sqrt{-1}} - \text{ی}^{-\text{لا}\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}\left(\text{ی}^{\text{لا}\sqrt{-1}} + \text{ی}^{-\text{لا}\sqrt{-1}}\right)}$$

اب ہم بعض نتائج قوت نمای قیمتون کی استعانت سے ثابت کرتے ہین

(۲۹۱) ہہ کو قواء مس ہہ مین پھیلاو

بموجب دفعہ ۲۹۰ کے

$$\sqrt{-1}\ \text{مس ہہ} = \frac{\text{ی}^{\text{ہہ}\sqrt{-1}} - \text{ی}^{-\text{ہہ}\sqrt{-1}}}{\text{ی}^{\text{ہہ}\sqrt{-1}} + \text{ی}^{-\text{ہہ}\sqrt{-1}}}$$

اسیواسطے $\frac{1+\sqrt{-1}\,\text{مس بر}}{1-\sqrt{-1}\,\text{مس بر}} = \frac{\text{ی}^{\text{بر}\sqrt{-1}}}{\text{ی}^{-\text{بر}\sqrt{-1}}} = \text{ی}^{2\,\text{بر}\sqrt{-1}}$

دونو ارکان مساوات کی لوکارثم لو تو

$$2\,\text{بر}\sqrt{-1} = \text{لوک}\left[1+\sqrt{-1}\,\text{مس بر}\right] - \left[\text{لوک}\,(1-\sqrt{-1}\,\text{مس بر})\right]$$

$$= 2\sqrt{-1}\left[\text{مس بر} - \frac{1}{3}\,\text{مس}^{3}\,\text{بر} + \frac{1}{5}\,\text{مس}^{5}\,\text{بر} - \cdots\right]$$

اسیواسطے $\text{بر} = \text{مس بر} - \frac{1}{3}\,\text{مس}^{3}\,\text{بر} + \frac{1}{5}\,\text{مس}^{5}\,\text{بر} - \cdots$

اسکو گریگری کا سلسلہ کہتے ہین

فرض کرو کہ $\text{مس بر} = \text{لا}$ تو $\text{بر} = \text{مس}^{-1}\,\text{لا}$

پس $\text{مس}^{-1}\,\text{لا} = \text{لا} - \frac{1}{3}\,\text{لا}^{3} + \frac{1}{5}\,\text{لا}^{5} - \cdots$

(۲۹۱) تحقیقات دفعہ گذشتہ کی قابل اطمینان کے نہین اسلئے کہ اوسے یہہ نہین معلوم ہوتا کہ نتیجہ کا کہانتک ایسا اعتبار ہوسکتا ہے کہ وہ موافق علم حساب صحیح معلوم ہو اور سمجھہ مین آتا ہو آخر سلسلہ کی ن وین رقم یہہ ہے کہ $\frac{(-1)^{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{2\text{ن}-1}}{2\text{ن}-1}$ اسسے معلوم ہوتا ہے کہ عددی قیمت نسبت (ن + ر) وین رقم اور ن وین رقم کی $\frac{2\text{ن}-1}{2\text{ن}+1}\,\text{لا}^{2}$ ہے اسیواسطے یہہ سلسلہ انضمامی ہے اگر لا چھوٹا واحد سے ہو (الجبرا کی دفعہ ۵۵۹ دیکھو) سلسلہ جب بھی انضمامی ہے کہ لا برابر واحد کے ہو الجبرا کی دفعہ ۵۵۸ دیکھو لیکن لا کی رقمیں جو بڑی واحد سے ہون اونکے واسطے یہہ سلسلہ انضمامی نہین ہے اور اسیواسطے اوسکی معنی از روی علم حساب کے سمجھہ نہین آسکتے ہین

(۲۹۲) علاوہ برین مس^{-1} لا کی ان گنت قیمتیں ہوا فق ایک ہی قیمت لا کے ہوسکتی ہین تو اس واسطے مساوات کی ایک رکن کی قیمتین بہ نسبت دوسرے رکن کے زیادہ ہوئین اس امر کا کچھہ بیان تحقیقات گذشتہ مین نہین ہوا

یہہ مضمون کما حقہ جب تک نہین بیان ہوسکتا کہ اوسمین علم جزئیات کام مین نہ لایا جاوے اسلئے طالب علم کو چاہیے کہ وہ گریگری کے سلسلے کے اثبات کو علم جزئیات کے باب ہفتم مین دیکھے

لیکن اگر بر = ن کہ + سر اسمین سر درمیان $-\frac{\text{کہ}}{4}$ اور $\frac{\text{کہ}}{4}$ کے واقع ہی تو

$$\text{سر} = \text{مس سر} - \frac{1}{3}\text{مس}^{3}\text{سر} + \frac{1}{5}\text{مس}^{5}\text{سر} - \dots$$

$$\text{یعنی بر} - \text{ن کہ} = \text{مس بر} - \frac{1}{3}\text{مس}^{3}\text{بر} + \frac{1}{5}\text{مس}^{5}\text{بر} - \dots$$

(۲۹۴) گریگری کی سلسلہ من بر = $\frac{\text{کہ}}{4}$ کے رکھو تو مس $\frac{\text{کہ}}{4}$ = ۱ کے ہوگا تو

$$\frac{\text{کہ}}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots$$

کہ کی قیمت دریافت کرنے کے واسطے اس سلسلہ کو کام مین لاسکتی تھی لیکن اوسمین انضمام ایسا آہستہ ہوتا ہی کہ جب بہت سی رقمین لین تو تقریبی قیمت کہ کی دریافت ہوتی ہے

(۲۹۵) یولر کا سلسلہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{1}{2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{3} = \text{مس}^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = \text{مس}^{-1} 1 = \frac{\text{کہ}}{4}$$

$$\text{پس } \frac{\text{کہ}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\times 2^{3}} + \frac{1}{5\times 2^{5}} - \frac{1}{7\times 2^{7}} + \dots$$

$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 3^{3}} + \frac{1}{5\times 3^{5}} - \frac{1}{7\times 3^{7}} + \dots$$

(۲۹۶) میچین کا سلسلہ اول ہم ثابت کرینگے کہ

$$\frac{\text{کہ}}{4} = 4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$$

$$2\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} = \text{مس}^{-1}\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \text{مس}^{-1}\frac{10}{24} = \text{مس}^{-1}\frac{5}{12}$$

$$4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} = 2\,\text{مس}^{-1}\frac{5}{12} = \text{مس}^{-1}\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \text{مس}^{-1}\frac{120}{119}$$

اسے معلوم ہوا کہ $4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5}$ کچھہ ہی بڑا نسبت $\frac{\text{کہ}}{4}$ کے ہے فرض کرو کہ

$$4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} = \frac{\text{کہ}}{4} + \text{مس}^{-1}\text{لا}$$

$$\text{تو } \frac{120}{119} = \text{مس}\left(\frac{\text{کہ}}{4} + \text{مس}^{-1}\text{لا}\right) = \frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}}$$

اسسے معلوم ہوتا ہے کہ لا = $\frac{1}{239}$

$$\text{اسیواسطے } \frac{\text{کہ}}{4} = 4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3\times 5^{3}} + \frac{1}{5\times 5^{5}} - \frac{1}{7\times 5^{7}} + \dots\right]$$

$$\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} - \frac{1}{7(239)^7} + \cdots\right]$$

(۲۹۷) یہہ ثابت ہو سکتا ہے کہ $\text{مس}^{-1}\frac{1}{239} = \text{مس}^{-1}\frac{1}{70} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{99}$

پس $\frac{\text{کہ}}{4} = 4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{70} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{99}$

پس سلسلہ $\text{مس}^{-1}\frac{1}{70}$ اور $\text{مس}^{-1}\frac{1}{99}$ کا حساب عددی لگانے کے واسطے بہت سہل ہے، دو محاسبین نے جدا جدا پانسو مرتبہ تک قیمت کہ کا حساب کیا ہے

(۲۹۸) معلوم ہے کہ جب لد = ن جب (لد + سہ) مطلوب یہہ ہے کہ لد کو ن کے قوا میں پھیلائیں

یہاں $\text{ی}^{\text{لد}\sqrt{-1}} - \text{ی}^{-\text{لد}\sqrt{-1}} = \text{ن}\left[\text{ی}^{(\text{لد}+\text{سہ})\sqrt{-1}} - \text{ی}^{-(\text{لد}+\text{سہ})\sqrt{-1}}\right]$

اسواسطے $\text{ی}^{2\text{لد}\sqrt{-1}} - 1 = \text{ن}\left[\text{ی}^{(2\text{لد}+\text{سہ})\sqrt{-1}} - \text{ی}^{-\text{سہ}\sqrt{-1}}\right]$

اسواسطے $\text{ی}^{2\text{لد}\sqrt{-1}} = \frac{1-\text{ن}\,\text{ی}^{-\text{سہ}\sqrt{-1}}}{1-\text{ن}\,\text{ی}^{\text{سہ}\sqrt{-1}}}$

اسواسطے $2\text{لد}\sqrt{-1} = \text{لوک}\left(1-\text{ن}\,\text{ی}^{-\text{سہ}\sqrt{-1}}\right) - \text{لوک}\left(1-\text{ن}\,\text{ی}^{\text{سہ}\sqrt{-1}}\right)$

$$= \text{ن}\left[\text{ی}^{\text{سہ}\sqrt{-1}} - \text{ی}^{-\text{سہ}\sqrt{-1}}\right] + \frac{\text{ن}^2}{2}\left[\text{ی}^{2\text{سہ}\sqrt{-1}} - \text{ی}^{-2\text{سہ}\sqrt{-1}}\right] + \frac{\text{ن}^3}{3}\left[\text{ی}^{3\text{سہ}\sqrt{-1}} - \text{ی}^{-3\text{سہ}\sqrt{-1}}\right]$$

اسواسطے $\text{لد} = \text{ن}\,\text{جب}\,\text{سہ} + \frac{\text{ن}^2}{2}\text{جب}\,2\text{سہ} + \frac{\text{ن}^3}{3}\text{جب}\,3\text{سہ} + \cdots$

مثال کے طور پر فرض کرو کہ سہ = کہ − ۲ لد تو ن = ۱ پس

$\text{لد} = \text{جب}\,2\text{لد} - \frac{1}{2}\text{جب}\,4\text{لد} + \frac{1}{3}\text{جب}\,6\text{لد} - \frac{1}{4}\text{جب}\,8\text{لد} + \cdots$

(۲۹۹) معلوم ہے کہ مس لد = ن مس ک تو لد کے واسطے ایک سلسلہ دریافت کرو

یہاں $\frac{\text{ی}^{\text{لد}\sqrt{-1}} - \text{ی}^{-\text{لد}\sqrt{-1}}}{\text{ی}^{\text{لد}\sqrt{-1}} + \text{ی}^{-\text{لد}\sqrt{-1}}} = \text{ن}\,\frac{\text{ی}^{\text{ک}\sqrt{-1}} - \text{ی}^{-\text{ک}\sqrt{-1}}}{\text{ی}^{\text{ک}\sqrt{-1}} + \text{ی}^{-\text{ک}\sqrt{-1}}}$

اسواسطے $\frac{\text{ی}^{2\text{لد}\sqrt{-1}} - 1}{\text{ی}^{2\text{لد}\sqrt{-1}} + 1} = \text{ن}\,\frac{\text{ی}^{2\text{ک}\sqrt{-1}} - 1}{\text{ی}^{2\text{ک}\sqrt{-1}} + 1}$

اسواسطے $\text{ی}^{2\text{لد}\sqrt{-1}} = \frac{(1+\text{ن})\,\text{ی}^{2\text{ک}\sqrt{-1}} + 1 - \text{ن}}{(1-\text{ن})\,\text{ی}^{2\text{ک}\sqrt{-1}} + 1 + \text{ن}}$

$= \text{ی}^{2\text{ک}\sqrt{-1}} \times \frac{1+\text{م}\,\text{ی}^{-2\text{ک}\sqrt{-1}}}{1+\text{م}\,\text{ی}^{2\text{ک}\sqrt{-1}}}$ جسمیں $\text{م} = \frac{1-\text{ن}}{1+\text{ن}}$

(۴۰۲) ایک مثلث کے دو ضلعے معلوم ہین اور زاویہ درمیانی اونکا معلوم ہے تیسرے ضلع کے لوگارثم کا سلسلہ دریافت کرو

فرضکرو کہ طا اور طب اضلاع معلوم ہین اور س مقیاس قوسی زاویہ معلوم کا، اور طب کو طا سے چھوٹا فرض کرو تو

$$\text{طس}^2 = \text{طا}^2 + \text{طب}^2 - 2\,\text{طا}\,\text{طب}\,\text{جم}\,\text{س} = \text{طا}^2 + \text{طب}^2 - \text{طا}\,\text{طب}\left[\text{ی}^{\text{س}\sqrt{-1}} + \text{ی}^{-\text{س}\sqrt{-1}}\right]$$

$$= \left[\text{طا} - \text{طب}\,\text{ی}^{\text{س}\sqrt{-1}}\right]\left[\text{طا} - \text{طب}\,\text{ی}^{-\text{س}\sqrt{-1}}\right]$$

$$= \text{طا}^2\left[1 - \frac{\text{طب}}{\text{طا}}\text{ی}^{\text{س}\sqrt{-1}}\right]\left[1 - \frac{\text{طب}}{\text{طا}}\text{ی}^{-\text{س}\sqrt{-1}}\right]$$

$$\text{پس } 2\,\text{لوگ}\,\text{طس} = 2\,\text{لوک}\,\text{طا} + \text{لوک}\left[1 - \frac{\text{طب}}{\text{طا}}\text{ی}^{\text{س}\sqrt{-1}}\right] + \text{لوک}\left[1 - \frac{\text{طب}}{\text{طا}}\text{ی}^{-\text{س}\sqrt{-1}}\right]$$

$$= 2\,\text{لوک}\,\text{طا} - \frac{\text{طب}}{\text{طا}}\left[\text{ی}^{\text{س}\sqrt{-1}} + \text{ی}^{-\text{س}\sqrt{-1}}\right] - \frac{\text{طب}^2}{2\,\text{طا}^2}\left[\text{ی}^{2\text{س}\sqrt{-1}} + \text{ی}^{-2\text{س}\sqrt{-1}}\right] - \cdots$$

$$\text{اسیواسطے لوک طس} = \text{لوک طا} - \frac{\text{طب}}{\text{طا}}\,\text{جم}\,\text{س} - \frac{\text{طب}^2}{2\,\text{طا}^2}\,\text{جم}\,2\text{س} - \frac{\text{طب}^3}{3\,\text{طا}^3}\,\text{جم}\,3\text{س} - \cdots$$

یہہ سلسلہ انضمامی ہے کیونکہ طب چھوٹا بہ نسبت طا کے ہے اور اگر $\frac{\text{طب}}{\text{طا}}$ چھوٹا ہو تو چند رقمون سے لوک طس کافی درجہ تک تقریباً معلوم ہوجائیگی

مثالین

(۱) جیب اور جیب التمام کی قوت نمائی قیمتین

$$\frac{\text{جب}\,\text{ا}}{1 - \text{جم}\,\text{ا}} = \text{مم}\,\frac{\text{ا}}{2}$$

کے ثابت کرنیکے کام مین لاؤ

(۲) اضلاع مثلث قائم الزاویہ کے اگر ۴۹ اور ۵۱ ہون تو ثابت کرو کہ اونکے مقابل زاویے ۴۳° ۵۱′ ۱۵″ اور ۴۶° ۸′ ۴۵″ تقریباً ہین

(۳) اگر ایک مثلث کا زاویہ س معلوم ہو اور دو اور متصل کے اضلاع طا اور طب تقریباً برابر ہون تو ثابت کرو کہ اور زاویے تقریباً

$$90 - \frac{\text{س}}{2} \pm \frac{180}{\text{ط}}\left[\frac{\text{طا} - \text{طب}}{\text{طا} + \text{طب}}\,\text{مم}\,\frac{\text{س}}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\text{طا} - \text{طب}}{\text{طا} + \text{طب}}\,\text{مم}\,\frac{\text{س}}{2}\right)^3\right]$$

ہونگے

(۴) اگر کسی مثلث مین ا - ب بمقابلہ س کے چھوٹا ہو تو

$ا = ب + ۲ \frac{طا - طب}{طب}$ جب ب + $\left(\frac{طا - طب}{طب}\right)$ جب ۲ب کے قریب قریب ہوگا

(۵) اگر طا اور طب اضلاع مثلث مستوی کے ہوں اور اونکے مقابل کے زاویے ا اور ب ہوں تو
لوک طب ـ لوک طا

$= $ جم ۲ا ـ جم ۲ب + $\frac{1}{2}$ (جم ۴ا ـ جم ۴ب) + $\frac{1}{3}$ (جم ۶ا ـ جم ۶ب) + ...

(۶) ثابت کرو کہ $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \ldots$

(۷) اگر ا + ب $\sqrt{(-1)}$ = لوک (م + ن $\sqrt{(-1)}$) تو ثابت کرو

مس ب = $\frac{ن}{م}$ اور ۲ا = لوک (ن۲ + م۲)

(۸) جم (بر + سر $\sqrt{(-1)}$) کو تحویل کرکے سہ + صہ $\sqrt{(-1)}$ کی صورت کا بناؤ

(۹) جب (بر + سر $\sqrt{(-1)}$) کو تحویل کرکے سہ + صہ $\sqrt{(-1)}$ کی صورت کا بناؤ

(۱۰) $[ط + ص \sqrt{(-1)}]^{ع + ف \sqrt{(-1)}}$ کو تحویل کرکے سہ + صہ $\sqrt{(-1)}$ کی صورت کا بناؤ

(۱۱) $[ط + ص \sqrt{(-1)} + ح]^{ع + ق \sqrt{(-1)}}$ کو تحویل کرکے سہ + صہ $\sqrt{(-1)}$ کی صورت کا بناؤ

(۱۲) ثابت کرو کہ

$[جب (سہ - بر) + ی^{سہ \sqrt{(-1)}} جب بر]^{ن} = جب^{ن-1} سہ [جب (سہ - ن بر) + ی^{\pm سہ \sqrt{(-1)}} جب ن بر]$

بائیسواں باب

علمی مثلثی سلسلوں کا جمع کرنا

(۳۰۳) ایک سلسلہ زاویوں کا متوالیہ حسابیہ ہے اونکے جوب کا مجموعہ دریافت کرو

فرض کرو کہ سلسلہ مفروضہ کی ن رقمیں ہوں

جب سہ + جب (سہ + صہ) + جب (سہ + ۲صہ) ـ ... + جب [سہ + (ن - ۱) صہ]

ہمکو معلوم ہے کہ جم (سہ - $\frac{1}{2}$ صہ) ـ جم (سہ + $\frac{1}{2}$ صہ) = ۲ جب $\frac{1}{2}$ صہ جب سہ

جم (سہ + $\frac{1}{2}$ صہ) ـ جم (سہ + $\frac{3}{2}$ صہ) = ۲ جب $\frac{1}{2}$ صہ جب (سہ + صہ)

جم (سہ + $\frac{3}{2}$ صہ) ـ جم (سہ + $\frac{5}{2}$ صہ) = ۲ جب $\frac{1}{2}$ صہ جب (سہ + ۲صہ)

$$\text{جم}\left(\text{سہ} + \frac{٢ن-٣}{٢}\text{صہ}\right) - \text{جم}\left(\text{سہ} + \frac{٢ن-١}{٢}\text{صہ}\right) = ٢\,\text{جب}\,\tfrac{١}{٢}\text{صہ}\;\text{جب}\left[\text{سہ} + (ن-١)\,\text{صہ}\right]$$

فرض کرو کہ سلسلہ مفروضہ کا مجموعہ ص ہو تو جمع کرنے سے

$$\text{جم}\left(\text{سہ} - \tfrac{١}{٢}\text{صہ}\right) - \text{جم}\left(\text{سہ} + \frac{٢ن-١}{٢}\text{صہ}\right) = ٢\,\text{ص}\;\text{جب}\,\tfrac{١}{٢}\text{صہ}$$

اسیواسطے

$$\text{ص} = \frac{\text{جم}\left(\text{سہ} - \tfrac{١}{٢}\text{صہ}\right) - \text{جم}\left(\text{سہ} + \frac{٢ن-١}{٢}\text{صہ}\right)}{٢\,\text{جب}\,\tfrac{١}{٢}\text{صہ}}$$

$$= \frac{\text{جب}\left(\text{سہ} + \frac{ن-١}{٢}\text{صہ}\right)\text{جب}\,\frac{ن\,\text{صہ}}{٢}}{\text{جب}\,\tfrac{١}{٢}\text{صہ}}$$

(٣٠٤) ایک سلسلہ زاویوں کا متوالیہ حسابیہ ہے اون زاویوں کے جیب التمام کے مجموعہ کو دریافت کرو

فرض کرو کہ سلسلہ مفروضہ میں ن رقمیں ہیں کہ

$$\text{جم}\,\text{سہ} + \text{جم}(\text{سہ}+\text{صہ}) + \text{جم}(\text{سہ}+٢\text{صہ}) + \cdots + \text{جم}\left[\text{سہ} + (ن-١)\,\text{صہ}\right]$$

ہمکو معلوم ہے کہ

$$\text{جب}\left(\text{سہ} + \tfrac{١}{٢}\text{صہ}\right) - \text{جب}\left(\text{سہ} - \tfrac{١}{٢}\text{صہ}\right) = ٢\,\text{جب}\,\tfrac{١}{٢}\text{صہ}\;\text{جم}\,\text{سہ}$$

$$\text{جب}\left(\text{سہ} + \tfrac{٣}{٢}\text{صہ}\right) - \text{جب}\left(\text{سہ} + \tfrac{١}{٢}\text{صہ}\right) = ٢\,\text{جب}\,\tfrac{١}{٢}\text{صہ}\;\text{جم}(\text{سہ}+\text{صہ})$$

$$\text{جب}\left(\text{سہ} + \tfrac{٥}{٢}\text{صہ}\right) - \text{جب}\left(\text{سہ} + \tfrac{٣}{٢}\text{صہ}\right) = ٢\,\text{جب}\,\tfrac{١}{٢}\text{صہ}\;\text{جم}(\text{سہ}+٢\text{صہ})$$

$$\text{جب}\left(\text{سہ} + \frac{٢ن-١}{٢}\text{صہ}\right) - \text{جب}\left(\text{سہ} + \frac{٢ن-٣}{٢}\text{صہ}\right) = ٢\,\text{جب}\,\tfrac{١}{٢}\text{صہ}\left[\text{سہ} + (ن-١)\,\text{صہ}\right]$$

فرض کرو کہ سلسلہ مفروضہ کا حاصل جمع ص ہو تو جمع کرنے سے

$$\text{جب}\left(\text{سہ} + \frac{٢ن-١}{٢}\text{صہ}\right) - \text{جب}\left(\text{سہ} - \tfrac{١}{٢}\text{صہ}\right) = ٢\,\text{ص}\;\text{جب}\,\tfrac{١}{٢}\text{صہ}$$

اسیواسطے

$$\text{ص} = \frac{\text{جب}\left(\text{سہ} + \frac{٢ن-١}{٢}\text{صہ}\right) + \text{جب}\left(\text{سہ} - \tfrac{١}{٢}\text{صہ}\right)}{٢\,\text{جب}\,\tfrac{١}{٢}\text{صہ}}$$

$$= \frac{\text{جم}\left(\text{سہ} + \frac{ن-١}{٢}\text{صہ}\right)\text{جب}\,\frac{ن\,\text{صہ}}{٢}}{\text{جب}\,\tfrac{١}{٢}\text{صہ}}$$

(٣٠٥) دفعہ ٣٠٤ کا سلسلہ دفعہ ٣٠٣ کے سلسلہ سے اسطرح مستنبط ہو سکتا تھا کہ $\text{سہ} + \frac{\pi}{٢}$ کو بجای سہ کے لکھدیتے ان سلسلوں کے جمع کرنے سے اکثر ایسی ضرورت پڑا کرتی کہ طالب علم کو انکا حاصل جمع بزبان ہونا چاہئے ابھی ہمنے لکھا ہے کہ اگر پہلا نتیجہ معلوم ہو تو

وہ کافی ہے کیونکہ دوسرا نتیجہ تو فقط اسیطرح حاصل ہو سکتا ہی کہ جیب کو جیب التمام سے اول جزو ضربی کے شمار کنندہ مین بدل دو اب نتائج کی صحت کا امتحان باسانی ہو سکتا ہی کہ جب ن = ۱ اور ن = ۲ تو ظاہر صحت نتائج کی معلوم ہوتی اور یہہ گویا محک امتحان اوس صورت قانونیہ کی صحت کا ہے اور وہ صورتین جنمین صہ = سہ کی ہو لکھنے کے قابل ہین تو

جب سہ + جب ۲ سہ + جب ۳ سہ + ... + جب ن سہ = $\frac{\text{جب } \frac{\text{ن+۱}}{۲} \text{ سہ جب } \frac{\text{ن سہ}}{۲}}{\text{جب } \frac{\text{سہ}}{۲}}$

جم سہ + جم ۲ سہ + جم ۳ سہ + ... جم ن سہ = $\frac{\text{جم } \frac{\text{ن+۱}}{۲} \text{ سہ جب } \frac{\text{ن سہ}}{۲}}{\text{جب } \frac{\text{سہ}}{۲}}$

(۳۰۶) اب مجموعہ ن رقمون

جب سہ − جب (سہ + صہ) + جب (سہ + ۲ صہ) − ... $(-۱)^{\text{ن}-۱}$ جب [سہ + (ن − ۱) صہ]

کا ہم مستنبط کر سکتے ہین اس سلسلہ کو ہم اسطرح لکھہ سکتے ہین

جب سہ + جب (سہ + صہ + π) + جب (سہ + ۲ صہ + ۲π) + ... + جب [سہ + (ن − ۱) (صہ + π)]

اسمین صرف دفعہ ۳۰۳ کے نتیجہ مین صہ کی جگہہ صہ + π لکھدیا ہے

پس مجموعہ مطلوب = $\frac{\text{جب } \left[\text{سہ} + \frac{(\text{ن}-۱)(\text{صہ}+\pi)}{۲}\right] \text{ جب } \frac{\text{ن(صہ}+\pi)}{۲}}{\text{جب } \frac{\text{صہ}+\pi}{۲}}$

اور اسیطرح

جم سہ − جم (سہ + صہ) + جم (سہ + ۲ صہ) − ... $(-۱)^{\text{ن}-۱}$ جم [سہ + (ن − ۱) صہ]

= $\frac{\text{جم } \left[\text{سہ} + \frac{(\text{ن}-۱)(\text{صہ}+\pi)}{۲}\right] \text{ جب } \frac{\text{ن(صہ}+\pi)}{۲}}{\text{جب } \frac{\text{صہ}+\pi}{۲}}$

(۳۰۷) ان ن رقمون کا حاصل جمع دریافت کرو

قم لہ + قم ۲ لہ + قم ۴ لہ + قم ۸ لہ + ... + قم $۲^{\text{ن}-۱}$ لہ

ہمکو معلوم ہے کہ قم لہ = ظم $\frac{\text{لہ}}{۲}$ − ظم لہ

قم ۲ لہ = ظم لہ − ظم ۲ لہ

...

قم $۲^{\text{ن}-۱}$ لہ = ظم $۲^{\text{ن}-۲}$ لہ − ظم $۲^{\text{ن}-۱}$ لہ

فرض کرو کہ جس سلسلہ مفروضہ ہے تو جمع کرنے سے

ص = مم $\frac{لا}{۲}$ − مم $\frac{لا}{۲^{ن-۱}}$

(۳۰۸) ان رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو

مس لا + $\frac{۱}{۲}$ مس $\frac{لا}{۲}$ + $\frac{۱}{۲^۲}$ مس $\frac{لا}{۲^۲}$ + ... + $\frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ مس $\frac{لا}{۲^{ن-۱}}$

ہمکو معلوم ہے کہ مس لا = مم لا − ۲ مم ۲ لا

$\frac{۱}{۲}$ مس $\frac{لا}{۲}$ = $\frac{۱}{۲}$ مم $\frac{لا}{۲}$ − مم لا

$\frac{۱}{۲^۲}$ مس $\frac{لا}{۲^۲}$ = $\frac{۱}{۲^۲}$ مم $\frac{لا}{۲^۲}$ − $\frac{۱}{۲}$ مم $\frac{لا}{۲}$

. . . .

$\frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ مس $\frac{لا}{۲^{ن-۱}}$ = $\frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ مم $\frac{لا}{۲^{ن-۱}}$ − $\frac{۱}{۲^{ن-۲}}$ مم $\frac{لا}{۲^{ن-۲}}$

فرض کرو کہ ص سلسلہ مفروضہ کو تعبیر کرتا ہے تو جمع کرنے سے

ص = $\frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ مم $\frac{لا}{۲^{ن-۱}}$ − ۲ مم ۲ لا

اور رقم $\frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ مم $\frac{لا}{۲^{ن-۱}}$ = $\frac{۱}{لا}$ جم صہ $\frac{صہ}{جب صہ}$ اسمیں صہ = $\frac{لا}{۲^{ن-۱}}$

اب اگر ن کو فرض کریں کہ وہ بحد و نہایت زیادہ ہوتا ہے تو جم صہ = ۱ اور $\frac{صہ}{جب صہ}$ = الس ۱

غایت الانتہا سلسلہ مفروضہ جب ن بے حد و نہایت زیادہ ہو $\frac{۱}{لا}$ − ۲ مم ۲ لا ہے

(۳۰۹) ان ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو

جب سہ + ح جب (سہ + صہ) + ح^۲ جب (سہ + ۲ صہ) + ... + ح$^{ن-۱}$ جب (سہ + (ن − ۱) صہ)

فرض کرو کہ ص سلسلہ مفروضہ کو تعبیر کرے تو جب کی جگہہ اونکی قیمتیں قوت نما مندرج کرو اور $\sqrt{-۱}$ کی جگہہ ک فرض کرو تو

۲ ک ص = ی$^{سہ ک}$ + ح ی$^{(سہ + صہ) ک}$ + ح^۲ ی$^{(سہ + ۲ صہ) ک}$ + ... + ح$^{ن-۱}$ ی$^{(سہ + (ن-۱) صہ) ک}$

− ی$^{-سہ ک}$ − ح ی$^{-(سہ + صہ) ک}$ − ح^۲ ی$^{-(سہ + ۲ صہ) ک}$ − ... − ح$^{ن-۱}$ ی$^{-(سہ + (ن-۱) صہ) ک}$

اب دو سلسلہ ہندسیہ حاصل ہوئے اسلئے

۲ ک ص = ی$^{سہ ک}$ $\frac{۱ - ح^ن ی^{ن صہ ک}}{۱ - ح ی^{صہ ک}}$ − ی$^{-سہ ک}$ $\frac{۱ - ح^ن ی^{-ن صہ ک}}{۱ - ح ی^{-صہ ک}}$

= س ح جم صہ [ی کا (سہ + ح جب صہ) – ی ک (سہ + ح جب صہ)] – ۲ ک جب سہ

اسیواسطے ص = ی ح جم صہ جب (سہ + ح جب صہ) – جب سہ

اور اسیطرح یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ حاصل جمع اس بے نہایت سلسلہ

ح جم (سہ + صہ) + $\frac{ح^۲}{۱ \times ۲}$ جم (سہ + ۲ صہ) + $\frac{ح^۳}{۳}$ جم (سہ + ۳ صہ) + ۰۰

کا ی ح جم صہ جم (سہ + ح جب صہ) – جم سہ ہے

اور یہہ نتیجہ پہلے نتیجہ سے بہی اسیطرح مستنبط ہوسکتا تہا کہ سہ کو اول نتیجہ مین سہ + $\frac{ط}{۲}$ سے بدل دیں

(۳۱۱) اب ہم زیادہ مثالین علم مثلثی جملون کی جمع کرنے کی نہین لکہتے امثلہ مشق مین بہت سی مثالین لکہدی ہین وہ طالب علم کو مشق کے واسطے کافی ہین بہت سی صورتین ایسی ہین کہ اونمین سلسلون کا اجتماع اون حکمتون سے ہوتا ہے جنکا بیان دفعات ۳۰۷ و ۳۰۸ مین کیا گیا ہے اونمین سلسلہ کی ہر ایک رقم کو دو رقمون کے حاصل تفریق کی صورت مین لکہا ہے فقط مشق اور تجربہ سے طالب علمون کو یہہ ملکہ حاصل ہوگا کہ وہ اسطرح رقمونکی صورت بدل لیا کرین اگر طالب علم کسی مثال کے اجزا کو اسطرح کی صورت مین نہ لاسکے تو اوسکو کچہہ مشکل اوسکی سمجہنے مین نہین ہوگی اگر وہ مثالون کے جوابون کو دیکہے مثلاً اوسکو ان ن رقمون کا جمع کرنا منظور تہا کہ

قطا سہ قطا ۲ سہ + قطا ۲ سہ قطا ۳ سہ + قطا ۳ سہ قطا ۴ سہ + ۰۰ + قطا ن سہ قطا (ن + ۱) سہ

اب اسکا حاصل قم سہ [مس (ن + ۱) سہ – مس سہ] ہے اب ن = ۱ تو اوسے ضروری ہے کہ تبدیل ہیئت پیدا ہو یعنی

قطا سہ قطا ۲ سہ = قم سہ [مس ۲ سہ – مس سہ]

تو قطا ۲ سہ قطا ۳ سہ = قم سہ [مس ۳ سہ – مس ۲ سہ]

اور علی ہذا القیاس

(۳۱۲) جو طالب علم علم جزئیات اور کلیات سے واقف ہین وہ سلسلہ معلوم کے بے شمار سلسلے کلی اور جزئی لینے سے مستنبط کرسکتے ہین اور جب اسطرح نتائج حاصل ہوجائین تو اونکو ہو افق اصول علم مثلث کے

پھر قائم کرسکتے ہین مثلاً دفعہ ۳۰۸ مین جو مساوات قائم ہوئے ہین اوسکی ہر رکن کی جزبہی لو

تو قطا^۲ لا + $\frac{1}{2}$ قطا^۲ $\frac{لا}{2}$ + $\frac{1}{2^2}$ قطا^۲ $\frac{لا}{2^2}$ + ... + $\frac{1}{2^{ن-1}}$ قطا^۲ $\frac{لا}{2^{ن-1}}$

= $\frac{1}{2^{ن-1}}$ قم $\frac{لا}{2^{ن-1}}$ + ۴ قم^۲ ۲ لا

اب پھر دفعہ ۳۰۹ مین سہ = صہ کے تو

$\frac{\text{جب سہ}}{1 - 2ح\ \text{جم سہ} + ح^2}$ = جب سہ + ح جب ۲ سہ + ح^۲ جب ۳ سہ + ح^۳ جب ۴ سہ + ...

بلحاظ سہ کے کلی طرفین کی لو تو

$-\frac{1}{2ح}$ لوک (۱ − ۲ح جم سہ + ح^۲) = جم سہ + $\frac{ح}{2}$ جم ۲ سہ + $\frac{ح^2}{3}$ جم ۳ سہ + $\frac{ح^3}{4}$ جم ۴ سہ

کسی مقدار مستقل کی ہونی ضرورت نہین ہے اسلئے کہ جب سہ صفر ہو تو دونو طرفین مساوات کے برابر ہونگے ہین

مثالین

(۱) اس سلسلہ کی ن رقمون کا حاصل جمع دریافت کرو

جب^۲ سہ + جب^۲ (سہ + صہ) + جب^۲ (سہ + ۲ صہ) + ...

(۲) اس سلسلہ کی ن رقمون کا حاصل جمع دریافت کرو

جب^۳ سہ + جب^۳ (سہ + صہ) + جب^۳ (سہ + ۲ صہ) + ...

(۳) اس سلسلہ کی ن رقمون کا حاصل جمع دریافت کرو

جم^۴ سہ + جم^۴ (سہ + صہ) + جم^۴ (سہ + ۲ صہ) + ...

(۴) ثابت کرو کہ

مس ن بر = $\frac{\text{جب بر + جب ۳ بر + جب ۵ بر + ... ن رقمون تک}}{\text{جم بر + جم ۳ بر + جم ۵ بر + ... ن رقمون تک}}$

(۵) اس سلسلہ کی ن رقمون تک جمع کرو

جم بر جم (بر + سہ) + جم (بر + سہ) جم (بر + ۲ سہ) + جم (بر + ۲ سہ) جم (بر + ۳ سہ) + ...

(۶) ثابت کرو کہ $\frac{\text{جب بر − جب ۲ بر + جب ۳ بر − ... ن رقمون تک}}{\text{جم بر − جم ۲ بر + جم ۳ بر − ... ن رقمون تک}}$ = مس $\frac{ن+1}{2}$ (ک + بر)

(۷) اس سلسلہ کو ن رقموں تک جمع کرو

جب (ن + ۱) بر جم بر + جب (ن + ۲) بر جم ۲ بر + ...

(۸) اس سلسلہ کو ن رقموں تک جمع کرو

جب سہ جب ۲ سہ + جب ۲ سہ جب ۳ سہ + جب ۳ سہ جب ۴ سہ + ...

اور پہر اسسے اس سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو کہ

۱ × ۲ + ۲ × ۳ + ۳ × ۴ + ...

(۹) اس سلسلہ کو ن رقموں کو جمع کرو

جب ۳ بر جب بر + جب ۶ بر جب ۲ بر + جب ۱۲ بر جب ۴ بر + ...

۱۰ مثال سے ۱۶ مثال تک جو سلسلے لکھے ہیں اونکے لا انتہا رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو

(۱۰) جم بر + $\frac{\text{جم بر}}{۱}$ جم ۲ بر + $\frac{\text{جم}^۲ \text{بر}}{۱ × ۲}$ جم ۳ بر + $\frac{\text{جم}^۳ \text{بر}}{\lfloor ۳}$ جم ۴ بر + ...

(۱۱) جب بر − $\frac{\text{جب}^۲ \text{بر}}{۱ × ۲}$ + $\frac{\text{جب}^۳ \text{بر}}{\lfloor ۳}$ ....

(۱۲) ۱ − $\frac{\text{جم}^۲ \text{بر}}{۱ × ۲}$ + $\frac{\text{جم}^۴ \text{بر}}{\lfloor ۴}$ − ....

(۱۳) ۲ جم بر + $\frac{۳}{۲}$ جم^۲ بر + $\frac{۴}{\lfloor ۲}$ جم^۳ بر + $\frac{۵}{\lfloor ۳}$ جم^۴ بر + ...

(۱۴) جب بر جم بر + $\frac{\text{جب ۲ بر جم}^۲ \text{بر}}{۱ × ۲}$ + $\frac{\text{جب ۳ بر جم}^۳ \text{بر}}{\lfloor ۳}$ + ...

(۱۵) جب بر + $\frac{\text{جب بر}}{۱}$ جم ۲ بر + $\frac{\text{جب}^۲ \text{بر}}{۱ × ۲}$ جم ۳ بر + ...

(۱۶) ثابت کرو کہ جم بر − $\frac{۱}{۲}$ جم ۲ بر + $\frac{۱}{۳}$ جم ۳ بر − .... = لوک (۲ جم $\frac{\text{بر}}{۲}$)

(۱۷) ثابت کرو کہ جم ۲ بر + $\frac{۱}{۳}$ جم ۶ بر + $\frac{۱}{۵}$ جم ۱۰ بر + ... = $\frac{۱}{۴}$ لوک (مم بر)

(۱۸) ثابت کرو کہ

لا جب بر − $\frac{\text{لا}^۲ \text{جب ۲ بر}}{۲}$ + $\frac{\text{لا}^۳ \text{جب ۳ بر}}{۳}$ − .... = تم$^{-۱}$ ($\frac{\text{جم بر}}{\text{لا}}$ + مم بر)

(۱۹) ثابت کرو کہ

لوک جم بر + لوک جم $\frac{\text{بر}}{۲}$ + لوک جم $\frac{\text{بر}}{۲^۲}$ + ... = لوک ($\frac{\text{جب ۲ بر}}{۲ \text{بر}}$)

۲۰ مثال سے ۲۳ مثال تک جو سلسلے لکھے ہیں اونکی ن رقموں کو جمع کرو

اسمین لی نصف قطر اوس دائرہ کا ہے جو کثیر الاضلاع کے اوپر بنا یا جاوے

(۲۷) ثابت کرو کہ اگر ن کوئی مثبت صحیح ہو تو

(ن+۱) ن جب ر + ن (ن−۱) جب ۲ ر + (ن−۱) (ن−۲) جب ۳ ر + ... + ۲ × ۱ جب ن ر

= ن (ن+۳) مم ر/۲ − ۱/۲ مم^۲ ر/۲ [حم ۳ر/۲ − حم (۲ن+۳)/۲ ر]

تیسوان باب

علم مثلثی جملوں کی تحلیل اجزاء ضربی میں

(۳۱۳) مسائل معادلات کے رسالہ سے یہہ بات خوب ثابت ہی کہ جملہ لا^ن − ا جسمین ن مثبت صحیح ہے ن اجزاء ضربی مین تحلیل ہو سکتا ہی اور ہر جزو ضربی لا − ط کی صورت ہوتا ہی اور اسمین ط کیا تو اصلی مقدار ہوتی ہی یا ایک جملہ اس صورت سے — ا کا ہوتا ہی اور اسمین سہ اور صہ اصلی مقادیر ہین اور ایسی ہی صنف ایسی اجزاء ضربی کی ہوتی ہی اب جملہ لا^ن − ا کو افراد اجزاء ضربی مین تحلیل کرنے مین جملہ لا^ن − ا کے اجزاء ضربی اس مساوات لا^ن − ا = ۰ کے حل کرنے سے دریافت ہوتی ہین ہر ایک قیمت اس مساوات کی ایک جزو ضربی یعنی لا − ط کو تعین کرتی ہے

(۳۱۴) لا^ن − ا کو اجزاء ضربی مین تحلیل کرو

مساوات لا^ن = ا کی ایک قیمت جملہ جم ۲ر کہ/ن ± ۱(−۱) جب ۲ر کہ/ن ہی جسمین ر کوئی صحیح ہے کیونکہ اس جملہ کی ن وین قوت بموجب ضابطہ دی موآور کے جم ۲ ر کہ ± ۱(−۱) جب ۲ ر کہ یعنی ا ہے

اول فرض کرو کہ ن جفت ہی اگر ر = ۰ رکہین تو ایک اصلی قیمت ا حاصل ہو گی اور اسکے مطابق ایک جزو ضربی لا − ا ہوگا اور اگر ہم ر = ن/۲ کے رکہین تو ہمکو ایک اصلی قیمت −۱ حاصل ہوگی اور مطابق اوسکے جزو ضربی لا + ا حاصل ہوگا اور اگر ر کے جگہہ متواتر قیمتین ا و ۲ و ۳ ... ن/۲ − ۱ رکہین تو ہمکو ن − ۲ اور زیادہ قیمتین حاصل ہونگین کیونکہ موافق ہر ایک قیمت ر کے دو قیمتین حاصل ہوتی ہین اور یہہ قیمتین سب مختلف ہین کیونکہ وے بنسبت کہ کے کم ہین اور سب

مختلف ہیں اور جم ۲رکہ/ن کی قیمتیں تطبیق نہیں ہوسکتی

اسیواسطے لا^ن - ۱ = (لا - ۱) (لا + ۱) ع

اسمیں ع حاصل ضرب ن - ۲ اجزاء ضربی کا ہی جو ر کی متواتر قیمتوں ۱ و ۲ و ۳ ... ن/۲ - ۱ اگر جملہ

لا - جم ۲رکہ/ن ± √(-۱) جب ۲رکہ/ن میں رکہنے سے حاصل ہوتا ہے

دو اجزاء ضربی

لا - جم ۲رکہ/ن - √(-۱) جب ۲رکہ/ن اور لا - جم ۲رکہ/ن + √(-۱) جب ۲رکہ/ن

کو باہم ضرب دینے سے ایک جزء ضربی درجہ دوم کا یہہ پیدا ہوتا ہے کہ

(لا - جم ۲رکہ/ن)^۲ + جب^۲ ۲رکہ/ن یعنی لا^۲ - ۲ لا جم ۲رکہ/ن + ۱

اسے معلوم ہوا کہ جب ن جفت ہو تو

لا^ن - ۱ = (لا - ۱) (لا + ۱) (لا^۲ - ۲ لا جم ۲که/ن + ۱) (لا^۲ - ۲ لا جم ۴که/ن + ۱) ...

... [لا^۲ - ۲ لا جم (ن-۲)که/ن + ۱] ... (۱)

دوم فرض کرو کہ ن طاق ہے اب صرف اصلی قیمت مساوات لا^ن = ۱ کی ۱ ہے اور باقی ن - ۱

قیمتیں اسطرح حاصل ہونگیں کہ ر کی قیمتیں ۱ و ۲ و ۳ ... (ن-۱)/۲ متواتر اس جملہ میں رکہیں کہ

جم ۲رکہ/ن ± √(-۱) جب ۲رکہ/ن

اسے معلوم ہوا کہ ن طاق ہو

لا^ن - ۱ = (لا - ۱) (لا^۲ - ۲ لا جم ۲که/ن + ۱) (لا^۲ - ۲ لا جم ۴که/ن + ۱) ...

... [لا^۲ - ۲ لا جم (ن-۳)که/ن + ۱] [لا^۲ - ۲ لا جم (ن-۱)که/ن + ۱] (۲)

(۳۱۵) لا^ن + ۱ کو اجزاء ضربی میں تحلیل کرو

مساوات لا^ن = -۱ کی ایک قیمت جملہ جم (۲ر+۱)/ن که ± √(-۱) جب (۲ر+۱)/ن که ہے جسمیں ر کوئی صحیح عدد ہے

اسواسطے کہ ن ویں قوت اس جملہ کی بموجب ضابطہ دی موآور کے

جم (۲ر+۱) که ± √(-۱) جب (۲ر+۱) که یعنی -۱ ہے

اول فرض کرو کہ ن جفت ہی تو کوئی اصلی قیمت مساوات لا^ن = -۱ کی نہیں ہوگی تمام ن قیمتیں خیالی ہونگیں اور ر کی متواتر قیمتیں ۰ و ۱ و ۲ و ۳ ... ن/۲ - ۱ جملہ جم (۲ر+۱)/ن کہ ± (-۱)^½ جب (۲ر+۱)/ن کہ میں رکھنے سے وہ قیمتیں حاصل ہونگیں

دو اجزاء ضربی لا - جم (۲ر+۱)/ن کہ - (-۱)^½ جب (۲ر+۱)/ن کہ

اور لا - جم (۲ر+۱)/ن کہ + (-۱)^½ جب (۲ر+۱)/ن کہ

باہم ضرب کھانے سے یہہ ممکن جز ضربی درجہ دوم کا پیدا کرتے ہیں کہ

(لا - جم (۲ر+۱)/ن کہ)^۲ + جب^۲ (۲ر+۱)/ن کہ یعنی لا^۲ - ۲ جم (۲ر+۱)/ن کہ + ۱

اسے معلوم ہوا کہ جب ن جفت ہو

لا^ن + ۱ = (لا^۲ - ۲ لا جم کہ/ن + ۱) (لا^۲ - ۲ لا جم ۳کہ/ن + ۱) (لا^۲ - ۲ لا جم ۵کہ/ن + ۱) ..

(لا^۲ - ۲ لا جم (ن-۳)/ن کہ + ۱) (لا^۲ - ۲ لا جم (ن-۱)/ن کہ + ۱) .... (۱)

فرض کرو کہ ن طاق ہو تو اصلی قیمت لا^ن = -۱ کی -۱ ہی ہے اور باقی اور ن - ۱ قیمتیں اسطرح حاصل ہونگیں کہ ر کی متواتر قیمتیں ۰ و ۱ و ۲ و ۳ .. (ن-۳)/۲ کو جملہ

جم (۲ر+۱)/ن کہ ± (-۱)^½ جب (۲ر+۱)/ن کہ میں رکھیں

اسے معلوم ہوا کہ جب ن طاق ہو تو

لا^ن + ۱ = (لا + ۱) (لا^۲ - ۲ لا جم کہ/ن + ۱) (لا^۲ - ۲ لا جم ۳کہ/ن + ۱) ..

... (لا^۲ - ۲ لا جم (ن-۴)/ن کہ + ۱) (لا^۲ - ۲ لا جم (ن-۲)/ن کہ + ۱) .... (۲)

(۳۱۶) اب یہہ چار صورتا نونیہ جو دو دفعات گذشتہ میں لکھی ہیں مطابقہ ہونے کی حیثیت سے صحیح ہیں ہم ان سے لا کی خاص قیمتیں مقرر کرکے خاص نتائج نکال سکتے ہیں مثلاً دفعہ ۳۱۴ کی مساوات (۱) کی طرفین کو لا - ۱ پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت دائیں طرف یہہ حاصل ہوگا کہ

لا^{ن-۱} + لا^{ن-۲} + ... + لا + ۱ اب لا = ۱ کے رکھو جب ن جفت ہو تو

$$\text{ن} = ۲^{\text{ن}-۲}\left(۱-\text{جم}\,\frac{۲\text{ک}}{\text{ن}}\right)\left(۱-\text{جم}\,\frac{۴\text{ک}}{\text{ن}}\right)\cdots\left(۱-\text{جم}\,\frac{\text{ن}-۴}{\text{ن}}\text{ک}\right)\left(۱-\text{جم}\,\frac{\text{ن}-۲}{\text{ن}}\text{ک}\right)$$

اب جذر لینے سے

$$\sqrt{\text{ن}} = ۲^{\frac{\text{ن}-۲}{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ک}}{\text{ن}}\;\text{جب}\,\frac{۲\text{ک}}{\text{ن}}\cdots\cdots\text{جب}\,\frac{\text{ن}-۴}{۲\text{ن}}\text{ک}\;\text{جب}\,\frac{\text{ن}-۲}{۲\text{ن}}\text{ک}\cdots\quad(۱)$$

اب علامت جذر کی بائیں طرف مثبت لینی چاہیے اسلیے کہ دائیں طرف بظاہر مثبت معلوم ہوتی ہے

اب پہر دفعہ ۳۱۴ کی (۲) کی دونو طرفونکو لا - ا پر تقسیم کرو اور بعد ازان لا = ا کے رکھو تو اسطرح سے جب ن طاق ہوگا تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ن} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(۱-\text{جم}\,\frac{۲\text{ک}}{\text{ن}}\right)\left(۱-\text{جم}\,\frac{۴\text{ک}}{\text{ن}}\right)\cdots\left(۱-\text{جم}\,\frac{\text{ن}-۳}{\text{ن}}\text{ک}\right)\left(۱-\text{جم}\,\frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}}\text{ک}\right)$$

جذر لینے سے

$$\sqrt{\text{ن}} = ۲^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ک}}{\text{ن}}\;\text{جب}\,\frac{۲\text{ک}}{\text{ن}}\cdots\text{جب}\,\frac{\text{ن}-۳}{۲\text{ن}}\text{ک}\;\text{جب}\,\frac{\text{ن}-۱}{۲\text{ن}}\text{ک}\cdots\quad(۲)$$

دفعہ ۳۱۵ کی (۱) مین لا = ا کے رکھو تو جب ن جفت ہوگا

$$۲ = ۲^{\frac{\text{ن}}{۲}}\left(۱-\text{جم}\,\frac{\text{ک}}{\text{ن}}\right)\left(۱-\text{جم}\,\frac{۳\text{ک}}{\text{ن}}\right)\cdots\left(۱-\text{جم}\,\frac{\text{ن}-۳}{\text{ن}}\text{ک}\right)\left(۱-\text{جم}\,\frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}}\text{ک}\right)$$ حاصل ہوگا

اور جذر نکالنے سے

$$۱ = ۲^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ک}}{۲\text{ن}}\;\text{جب}\,\frac{۳\text{ک}}{۲\text{ن}}\cdots\text{جب}\,\frac{\text{ن}-۳}{۲\text{ن}}\text{ک}\;\text{جب}\,\frac{\text{ن}-۱}{۲\text{ن}}\text{ک}\cdots\quad(۳)$$

اور پہر دفعہ ۳۱۵ کی (۲) مین لا = ا کے رکہا تو جب ن طاق ہوگا

$$۲ = ۲^{\text{ن}}\left(۱-\text{جم}\,\frac{\text{ک}}{\text{ن}}\right)\left(۱-\text{جم}\,\frac{۳\text{ک}}{\text{ن}}\right)\cdots\left(۱-\text{جم}\,\frac{\text{ن}-۴}{\text{ن}}\text{ک}\right)\left(۱-\text{جم}\,\frac{\text{ن}-۲}{\text{ن}}\text{ک}\right)$$

اور جذر نکالنے سے

$$۱ = ۲^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ک}}{۲\text{ن}}\;\text{جب}\,\frac{۳\text{ک}}{۲\text{ن}}\cdots\text{جب}\,\frac{\text{ن}-۴}{۲\text{ن}}\text{ک}\;\text{جب}\,\frac{\text{ن}-۲}{۲\text{ن}}\text{ک}\cdots\quad(۴)$$

اب بظاہر چار اور نتیجے صورتاً پوشیدہ دفعات گذشتہ سے مستنبط ہو جاینگے اگر لا = -ا کے رکہین مگر امتحان سے یہہ بات معلوم ہوگی کہ جو نتیجے حاصل ہونگے وہ فی الحقیقت نتائج مشخصہ سے مختلف نہ ہونگے مثلاً دفعہ ۳۱۴ کے (۱) مین طرفین کو لا + ا پر تقسیم کرین اور پہر لا = -ا کے رکہین اور جذر نکالین تو ن کے جفت ہونے کی حالت مین

وان = ۲ جم ن/۲ جم کہ/ن ... جم (ن-۱)/۲ن کہ جم (ن-۱)/ن کہ

حاصل ہوگا اور یہہ وہی ہے جو اس دفعہ کے (۱) مین لکہا ہے فقط بائین طرف اجزاء ضربی مختلف ترتیب سے لکہے ہوئے ہین کیونکہ

جم کہ/ن = جب (ن-۲)/۲ن کہ اور جم ۲کہ/ن = جب (ن-۴)/۲ن کہ ...

(۳۱۷) لا^۲ن - ۲لا^ن جم بر + ۱ کو اجزاء ضربی مین تحلیل کرو

اگر جم بر = ۱ تو ہر جملہ کی صورت (لا^ن - ۱)^۲ ہوجائیگی اور اگر جم بر = -۱ تو اوسکی صورت (لا^ن + ۱)^۲ ہوجائیگی ان صورتون مین تحلیل اجزاء کی موافق دفعات ۳۱۴ اور ۳۱۵ کے ہوگی اسواسطے ان صورتونکو آئندہ خارج سمجہنا چاہیے اگر ہم یہہ رکہین کہ

لا^۲ن - ۲ لا^ن جم بر + ۱ = ۰ اور اسے

لا^ن = جم بر ± √(-۱) جب بر حاصل کرین تو اسے معلوم ہوگا کہ لا ان مرتبہ کا نزول جم بر ± √(-۱) جب بر کا ہے اور ن مرتبہ کا نزول اس جملہ جم (۲رکہ + بر)/ن ± √(-۱) جب (۲رکہ + بر)/ن سے اسطرح دریافت ہوسکتا ہی کہ ر کی صحیح قیمتین مندرج کرین کیونکہ ضابطہ ڈی موئور سے یہہ امر ظاہر ہے کہ ن مرتبہ کا صعود اخیر جملہ کا جم (۲رکہ + بر) ± √(-۱) جب (۲رکہ + بر) اگر ر صحیح ہو تو اوسکی تحویل اس جملہ کی طرف ہوسکتی ہے کہ جم ± √(-۱) جب بر اگر ہم ر کی متواتر قیمتین ۰ و ۱ و ۲ ... ن-۱ جملہ جم (۲رکہ ± بر)/ن ± √(-۱) جب (۲رکہ + بر)/ن مین مندرج کرین تو ن مختلف قیمتین جملہ کی حاصل ہونگین اسواسطے کہ اگر ر = ع اور ر = ق سے ایک ہی قیمت جملہ کی حاصل ہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جم (۲عکہ + بر)/ن ± √(-۱) جب (۲عکہ + بر)/ن = جم (۲قکہ + بر)/ن ± √(-۱) جب (۲قکہ + بر)/ن

اب بموجب دفعہ ۳۹ کے ہم جم (۲عکہ + بر)/ن = جم (۲قکہ + بر)/ن

اور جب (۲عکہ + بر)/ن = جب (۲قکہ + بر)/ن نہین ہوسکتا اور یہہ ناممکن ہے کہ

جم (۲عکہ + بر)/ن = جم (۲قکہ + بر)/ن اور جب (۲عکہ + بر)/ن = جب (۲قکہ + بر)/ن

اسواسطے کہ موجب دفعہ ۹۴ کے ۲ع کہ + بر / ن + ۲ق کہ + بر / ن اضعاف ۲ کہ کا ہونا چاہیے تو بر اضعاف ن کہ کا ہوا اور یہہ قیمت بر کی ہم پہلی ہی خارج کر آئی ہین پس اس سے ثابت ہوا کہ ۲ن مختلف قیمتین لا کی حاصل ہوتی ہین اور نیز دو اجزاء ضربی

لا − جم ۲ر کہ + بر / ن − √(−۱) جب ۲ر کہ + بر / ن اور لا − جم ۲ر کہ + بر / ن + √(−۱) جب ۲ر کہ + بر / ن

اور انکو باہم ضرب دینے سے یہہ اصلی جز ضربی درجہ دوم کا حاصل ہوتا ہے کہ

(لا − جم ۲ر کہ + بر / ن)^۲ + جب^۲ ۲ر کہ + بر / ن یعنی لا^۲ − ۲ لا جم ۲ر کہ + بر / ن + ۱

پس لا^۲ن − ۲ لا^ن جم بر + ۱

= (لا^۲ − ۲ لا جم بر/ن + ۱) (لا^۲ − ۲ لا جم ۲کہ + بر / ن + ۱) (لا^۲ − ۲ لا جم ۴کہ + بر / ن + ۱)

... (لا^۲ − ۲ لا جم (۲ن − ۴) کہ + بر / ن + ۱) (لا^۲ − ۲ لا جم (۲ن − ۲) کہ + بر / ن + ۱)

(۳۱۸) اب مسئلہ عامہ جو اوپر لکھا ہے اوس سے نتائج عظیمہ ہم مستنبط کرتے ہین فرض کرو کہ لا = ۱ تو

۲(۱ − جم بر) = ۲^ن (۱ − جم بر/ن) (۱ − جم ۲کہ + بر / ن) (۱ − جم ۴کہ + بر / ن) ...

(۱ − جم ۲ن کہ − ۲کہ + بر / ن)

فرض کرو کہ بر = ۲ن سر اور کہ / ۲ن = سہ جذر نکالو تو

± جب ن سر = ۲^ن−۱ جب سر جب (۲سہ + سر) جب (۴سہ + سر) ... جب (۲ن سہ − ۲سہ + سر)

اب ہم ثابت کرینگے کہ دائین طرف کے اوپر کی علامت ہمیشہ لینی چاہیے اول فرض کرو کہ سر درمیان ۰ اور ۲سہ کے واقع ہوتا ہے تو بائین طرف کا ہر ایک جز ضربی مثبت ہوگا اور ایسا ہی جب ن سر ہوگا

دوم فرض کرو کہ سر درمیان ۲سہ اور ۴سہ کے واقع ہو تو ہر ایک جز ضربی بائین طرف مثبت ہی اِلّا آخر کا جز جب ن سر منفی ہے پھر فرض کرو کہ سر درمیان ۴سہ اور ۶سہ کے واقع ہے تو بائین طرف کا ہر جز ضربی مثبت ہوگا اِلّا آخر کے دو جز اور جب ن سر مثبت ہوگا

اسیطرح عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہین کہ ۰ اور ۲ن سہ کے درمیان ہر ایک قیمت سر کی لیجائے تو اوپر کی علامت لینی چاہیے پس سہ کے تمام قیمتون کے واسطے جو ۰ اور ۱۸۰° کے درمیان

واقع مین یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جب ن سر = $۲^{ن-۱}$ جب سر جب (۲ سہ + سر) جب (۴ سہ + سر) . . جب (۲ ن سہ - ۲ سہ + سر)

اور اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ یہہ صورت قانونیہ سر کی سب قیمتون کے واسطے درست ہی اسواسطے کہ فرض کرو

سر = م کہ + مر اسمین م صحیح مثبت یا منفی ہے اور مر درمیان ۰ اور کہ کے واقع ہے

تو ہمکو یہہ معلوم ہے کہ

جب ن مر = $۲^{ن-۱}$ جب مر جب (۲ سہ + مر) جب (۴ سہ + مر) . جب (۲ ن سہ - ۲ سہ + مر)

لیکن جب ن مر = جب (ن سر - ن م کہ) = جب ن سر جم ن م کہ = $(-۱)^{ن م}$ جب ن سر

جب مر = جب (سر - م کہ) = جب سر جم م کہ = $(-۱)^{م}$ جب سر

جب (۲ سہ + مر) = جب (۲ سہ + سر - م کہ) = جب (۲ سہ + سر) جم م کہ = $(-۱)^{م}$ جب (۲ سہ + سر)

اور علی ہذا القیاس

ان قیمتون جب ن مر جب مر اور جب (۲ سہ + مر) . . . کو اس صورت قانونیہ مین جو جب ن مر کو اجزا ضربی مین بیان کرتی ہی مندرج کرو اور دونو طرف کو $(-۱)^{ن م}$ پر تقسیم کرو تو ہم کو مطلوب صورت قانونیہ جب ن سر کے واسطے حاصل ہوگی خواہ سر کی کچھہ ہی قیمت ہو

معلوم ہوا کہ اسلئے جملہ جب ن سر مین سر کو سر + سہ سے تبدیل کرو تو ن سر تبدیل ن سر + کہ سے تبدیل ہوگا

جم ن سر = $۲^{ن-۱}$ جب (سر + سہ) جب (سر + ۳ سہ) (جب سر + ۵ سہ) . . جب (ن سہ - سہ + سر)

اخیر نتیجہ مین سر = ۰ کے لکھو تو

۱ = $۲^{ن-۱}$ جب سہ جب ۳ سہ جب ۵ سہ . . جب (۲ ن سہ - سہ)

اسمین سہ = $\frac{کہ}{۲ ن}$

اور یہہ بھی ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

$\frac{جب ن سر}{جب سر}$ = $۲^{ن-۱}$ جب (۲ سہ + سر) جب (۴ سہ + سر) . جب (۲ ن سہ - ۲ سہ + سر)

اب سر کو بعید و نہایت کم ہو تو اس سبب سے کہ غایت الانتہا $\frac{جب ن سر}{جب سر}$ کی ن ہے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ن = $۲^{ن-۱}$ جب ۲ سہ جب ۴ سہ جب ۶ سہ . . جب (۲ ن سہ - ۲ سہ)

یہہ صور قانونیہ بعض اوقات فایدہ مند ہوتی ہین

(۱۹ ۳۱) دفعہ ۱۸ ۳۱ کے جملے جب ن سر کے مختلف صورتوں مین لکہی جاسکتی ہین اسواسطے کہ

جب (۲ ن سہ − ۲ سہ + سر) = جب (کہ − ۲ سہ + سر) = جب (۲ سہ − سر)

جب (۲ ن سہ − ۴ سہ + سر) = جب (کہ − ۴ سہ + سر) = جب (۴ سہ − سر)

اور علیٰ ہذا القیاس

اب دوسرے جزء ضربی کو باہم اور تیسرے اور ایک آخر جزء ضربی کو باہم ضرب دینے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جب ن سر = ۲ ن−۱ جب سر (جب ۲ سہ − جب سر) (جب ۴ سہ − جب سر)

اب یہہ ضرور ہے کہ اون صورتوں کا جدا جدا امتحان کرین جنمین ن جفت اور طاق ہو

اول فرض کرو کہ ن جفت ہی تو جزء ضربی جب (ن سہ + سر) یعنی جم سر اسطرح واقع ہوگا کہ کوئی جزء ضربی اوسمین ضرب نہین کہا یگا اسے معلوم ہوا کہ اگر ن جفت ہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جب ن سر = ۲ ن−۱ جب سر جم سر (جب ۲ سہ − جب سر) (جب ۴ سہ − جب سر) …

[جب (ن − ۴) سہ − جب سر] [جب (ن − ۲) سہ − جب سر]

دوم فرض کرو کہ ن طاق ہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جب ن سر = ۲ ن−۱ جب سر (جب ۲ سہ − جب سر) (جب ۴ سہ − جب سر)

… [جب (ن − ۳) سہ − جب سر] [جب (ن − ۱) سہ − جب سر]

اور اسیطرح صور قانونیہ

جم ن سر = ۲ ن−۱ جب (سر + سہ) جب (سر + ۳ سہ) جب (سر + ۵ سہ) … جب (۲ ن سہ − سہ + سر)

سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے اگر ن جفت ہو کہ

جم ن سر = ۲ ن−۱ (جب سہ − جب سر) (جب ۳ سہ − جب سر) …

[جب (ن − ۳) سہ − جب سر] [جب (ن − ۱) سہ − جب سر]

اور اگر ن طاق ہو تو

جم ن سر = ۲^ن-۱ جم سر (جب^۲ سہ - جب^۲ سر) (جب^۲ ۲ سہ - جب^۲ سر)

[جب^۲ (ن-۴) سہ - جب^۲ سہ] [جب^۲ (ن-۲) سہ - جب^۲ سر]

(۳۲۰) جب بر اور جم بر کو اجزاء ضربی مین تحلیل کرو

فرض کرو کہ ن سر = بر اور ن طاق ہے تو بموجب دفعہ گذشتہ کے

جب بر = ۲^ن-۱ جب بر/ن (جب^۲ ۲ سہ - جب^۲ بر/ن) (جب^۲ ۴ سہ - جب^۲ بر/ن) ...

طرفین مساوات کو جب بر/ن پر تقسیم کرو اور بر کو بحد و نہایت گہٹاو تو اس سبب سے کہ جب بر ÷ جب بر/ن کے غایت الانتہا ن ہے اسواسطے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ن = ۲^ن-۱ جب^۲ ۲ سہ جب^۲ ۴ سہ ...

اسواسطے تقسیم سے

جب بر = ن جب بر/ن (۱ - جب^۲ بر/ن ÷ جب^۲ ۲ سہ) (۱ - جب^۲ بر/ن ÷ جب^۲ ۴ سہ)

اب فرض کرو کہ ن بحد و نہایت زیادہ ہوتا ہی تو اس سبب سے کہ سہ = ک/۲ن تو غایت الانتہا جب^۲ بر/ن ÷ جب^۲ ۲ سہ کی بر^۲/ک^۲ ہی اور غایت الانتہا جب^۲ بر/ن ÷ جب^۲ ۴ سہ کی بر^۲/۲^۲ک^۲ ہے اور علی ہذا القیاس

پس آخر کار

جب بر = بر (۱ - بر^۲/ک^۲) (۱ - بر^۲/۲^۲ک^۲) (۱ - بر^۲/۳^۲ک^۲) ...

اگر ن کو جفت فرض کرین تو بہی یہی نتائج حاصل ہوتے

اور اسیطرح ہم ثابت کر سکتے ہین کہ

جم بر = (۱ - ۴بر^۲/ک^۲) (۱ - ۴بر^۲/۳^۲ک^۲) (۱ - ۴بر^۲/۵^۲ک^۲) ...

(۳۲۱) جسطرح کہ لا^۲ن - ۲ لا^ن جم بر + ۱ کو دفعہ ۳۱۷ مین تحلیل اجزاء ضربی مین کیا تہا اوسیطرح لا^۲ن - ۲ لا^ن ط^ن جم بر + ط^۲ن کو تحلیل اجزاء ضربی مین کر سکتے ہین اور اخیر جملہ کا ہر ایک جز ضربی درجہ دوم کا اس صورت کا لا^۲ - ۲ لا ط جم (۲ر ک + بر)/ن + ط^۲ ہوگا اسمین ہر ایک صحیح ہی اور تمام اجزا اسطرح حاصل ہوسکتی ہین کہ ر کی متواتر قیمتین ۰ و ۱ و ۲ ... ن - ۱ اسمین درج کرین

اور جم $\frac{\text{۲(ن-۱) کہ + بر}}{\text{ن}}$ = جم $\frac{\text{۲ کہ - بر}}{\text{ن}}$ اور جم $\frac{\text{۲(ن-۲) کہ + بر}}{\text{ن}}$ = جم $\frac{\text{۴ کہ - بر}}{\text{ن}}$

اور علی ہذا القیاس اسطرح تمام اجزاء ضربی دریافت ہوجائینگی اگر ہم

لآ - ۲ لا ط جم $\frac{\text{۲ ر کہ} \pm \text{بر}}{\text{ن}}$ + طٓ لیں اور دونو علامتون کا استعمال کرین اور اگر ن کی

صورت مین جفت ہو تو ر کی قیمتین ۰ اور ۱ اور ۲ ... $\frac{\text{ن}}{\text{۲}}$ - ۱ تک مقرر کرین اگر ن طاق ہو $\frac{\text{ن}}{\text{۲}}$ تک قیمتین مقرر کرین اگر ن جفت ہے

دوسری صورت مین حقیقت ر = $\frac{\text{ن}}{\text{۲}}$ کے ہو تو ہم کوئی ایک جز ضربی لآ - ۲ لا ط جم $\frac{\text{ن کہ} + \text{بر}}{\text{ن}}$ + طٓ

لے سکتے ہین

اب فرض کرو کہ لا = ۱ + $\frac{\text{ی}}{\text{۲ن}}$ اور ط = ۱ - $\frac{\text{ی}}{\text{۲ن}}$ تو جملہ

$$\left(\text{۱} + \frac{\text{ی}}{\text{۲ن}}\right)^{\text{۲ن}} - \text{۲}\left(\text{۱} - \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{\text{۴ن}^{\text{۲}}}\right)^{\text{ن}} \text{جم بر} + \left(\text{۱} - \frac{\text{ی}}{\text{۲ن}}\right)^{\text{۲ن}}$$

کی تحلیل اجزاء ضربی مین کرنی پڑیگی اور صور عامہ اجزاء ضربی کی یہہ ہوگی

$$\left(\text{۱} + \frac{\text{ی}}{\text{۲ن}}\right)^{\text{۲}} - \text{۲}\left(\text{۱} - \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{\text{۴ن}^{\text{۲}}}\right) \text{جم} \frac{\text{۲ ر کہ} \pm \text{بر}}{\text{ن}} + \left(\text{۱} - \frac{\text{ی}}{\text{۲ن}}\right)^{\text{۲}}$$

یعنی ۲ $\left(\text{۱} + \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{\text{۴ن}^{\text{۲}}}\right)$ - ۲ $\left(\text{۱} - \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{\text{۴ن}^{\text{۲}}}\right)$ جم $\frac{\text{۲ ر کہ} \pm \text{بر}}{\text{ن}}$

یعنی ۴ جب$^{\text{۲}}$ $\frac{\text{۲ ر کہ} \pm \text{بر}}{\text{۲ن}}$ $\left(\text{۱} + \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{\text{۴ن}^{\text{۲}}} \text{ ضم}^{\text{۲}} \frac{\text{۲ ر کہ} \pm \text{بر}}{\text{۲ن}}\right)$

اب فرض کرو کہ ن بیحد و نہایت زیادہ ہوتا ہے تو

$$\left(\text{۱} + \frac{\text{ی}}{\text{۲ن}}\right)^{\text{۲ن}} = \text{ی}^{\text{ی}} \text{ و } \left(\text{۱} - \frac{\text{ی}}{\text{۲ن}}\right)^{\text{۲ن}} = \text{ی}^{-\text{ی}}$$ (جبر و مقابلہ دفعہ ۵۵۲)

اور نیز $\frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{\text{۴ن}^{\text{۲}}}$ ضم$^{\text{۲}}$ $\frac{\text{۲ ر کہ} \pm \text{بر}}{\text{۲ن}}$ = $\frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{(\text{۲ ر کہ} \pm \text{بر})^{\text{۲}}}$

اب ی = ۰ کے رکہین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۴ جب$^{\text{۲}}$ $\frac{\text{بر}}{\text{۲}}$ = ۴ جب$^{\text{۲}}$ $\frac{\text{بر}}{\text{۲ن}}$ ۴ جب$^{\text{۲}}$ $\frac{\text{۲ کہ} \pm \text{بر}}{\text{۲ن}}$ ۴ جب$^{\text{۲}}$ $\frac{\text{۴ کہ} \pm \text{بر}}{\text{۲ن}}$

پس اخر کو

$$\text{ی}^{\text{ی}} - \text{۲ جم بر} + \text{ی}^{-\text{ی}} = \text{۴ جب}^{\text{۲}} \frac{\text{بر}}{\text{۲}} \left[\text{۱} + \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{\text{بر}^{\text{۲}}}\right] \left[\text{۱} + \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{(\text{۲ کہ} \pm \text{بر})^{\text{۲}}}\right] \left[\text{۱} + \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{(\text{۴ کہ} \pm \text{بر})^{\text{۲}}}\right] \ldots$$

اور مثالین اس قبیل کی جزئیات اور کلیات مین موجود ہین

(۳۲۲) خاصیت دائرہ کی جو ڈی موئور صاحب نے تحقیق کی

فرض کرو کہ ہ مرکز دائرہ کا ہی اور ع کوئی نقطہ دائرہ کے اندر یا باہر واقع ہے کل محیط کو کسی نقطہ ب سے شروع کر کے ن برابر قوسوں ب س اور س د اور دی ... میں تقسیم کرو ہ اور ع کو نقاط تقسیم ب و س و د ... سے ملاؤ فرض کرو کہ ع ہ ب = بر تو

ہ ع^۲ن − ۲ ہ ع^ن . ہ ب^ن جم ن بر + ہ ب^۲ن = ع ب^۲ . ع س^۲ . ع د^۲ ... ن اجزاء ضربی تک

دلیل یہ ہے کہ ع ب^۲ = ہ ع^۲ − ۲ ہ ع . ہ ب جم بر + ہ ب^۲

ع س^۲ = ہ ع^۲ − ۲ ہ ع . ہ س جم (بر + ۲ط/ن) + ہ س^۲

ع د^۲ = ہ ع^۲ − ۲ ہ ع . ہ د جم (بر + ۴ط/ن) + ہ د^۲

. . . .

اور نصف قطر ہ ب اور ہ س اور ہ د سب آپس میں برابر ہیں

دفعات ۳۱۷ اور ۳۲۱ میں تمام رقموں کا حاصل ضرب ان مساواتوں کی بائیں طرف کا ہے

ہ ع^۲ن − ۲ ہ ع^ن . ہ ب^ن جم ن بر + ہ ب^۲ن

اس سے دعوی ثابت ہے

اور اس خاص صورت میں جب ع محیط پر واقع ہو تو

۲ ہ ب^ن جب (ن بر/۲) = ع ب . ع س . ع د . . . ن اجزاء ضربی تک

خواص دائرہ کی جو کوٹس نے تحقیق کی

وہ ڈی موئور کی خاصیت دائرہ کی خاص صورتین ہین

ع کو خارج کرکے دائرہ سے اپر لاؤ اگر ضرورت ہو

اور فرض کرو کہ اب = ب س = $\frac{۲ ک}{ن}$ اور ن بر = ۲ کہ پس یہہ ہمکو حاصل ہوگا کہ

(د ع^ن - ر ب^ن)^۲ = ع ب^۲ . ع س^۲ . ع د^۲ . . . . ن اجزاء ضربی تک

اسیواسطے د ع^ن - ر ب^ن = ع ب . ع س . ع د . . . . ن اجزاء ضربی تک

اب فرض کرو کہ قوسین اب اور ب س . . . کی آ اور بَ . . . پر

تنصیف کیجائین تو جو مسئلہ ابھی ثابت ہوا ہے اوسکی موافق

د ع^{۲ن} - ر ب^{۲ن} = ع آ . ع ب . ع بَ . ع تین . . . ۲ ن اجزاء ضربی تک

اسیواسطے تقسیم سے

د ع^ن + ر ب^ن = ع آ . ع بَ . ع سَ . . . ن اجزاء ضربی تک

(۳۴۳) علم مثلث کی کتابون مین یہہ بھی دستور ہی کہ دفعہ ۲۴۳ کے نتائج کا اثبات اسطرح بھی لکھا کرتے ہین جس طرح نیچے لکھا ہے مگر یہہ اثبات قابل اطمینان نہین ہے

چونکہ جب بر فنا اوس صورتمین ہوجاتی ہے کہ بر = . یا ± کہ یا ± ۲ کہ . . . اسے یہہ نتیجہ نکلتا ہے

کہ جب بر برابر اور بر + کہ اور بر - کہ اور بر + ۲ کہ اور بر - ۲ کہ . . . پر تقسیم ہوتا ہے

اسیواسطے ہم فرض کرسکتے ہین کہ

جب بر = ا بر (بر - کہ) (بر + کہ) (بر - ۲ کہ) (بر + ۲ کہ) (بر - ۳ کہ) (بر + ۳ کہ)

اسمین ا کوئی ایسی مقدار ہی جسکو بر سے کچھہ لگاؤ نہین پس ہم یہہ فرض کرسکتے ہین کہ

جب بر = ا بر $\left(1-\frac{بر^2}{کہ^2}\right)\left(1-\frac{بر^2}{۲^2 کہ^2}\right)\left(1-\frac{بر^2}{۳^2 کہ^2}\right)$

اسمین ا بھی ایسی مقدار ہی کہ جسکو لگاؤ بر سے نہین ہے طرفین کو بر پر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ بر = . تو اس سبب یہہ نتیجہ حاصل ہوگا

جب بر = بر (۱ − بر²/کہ²) (۱ − بر²/۴ کہ²) (۱ − بر²/۹ کہ²) . . .

اور چونکہ جم بر فنا ہو جاتا ہے جبکہ بر = ± کہ/۲ یا ± ۳کہ/۲ . . .

تو اسسے یہہ نتیجہ مستنبط ہوتا ہے کہ جم بر پورا تقسیم بر − کہ/۲ اور بر + کہ/۲ اور بر − ۳کہ/۲ اور بر + ۳کہ/۲ . . . پر ہوتا ہے اسیواسطے ہم فرض کرتے ہین کہ

جم بر = ا (بر − کہ/۲) (بر + کہ/۲) (بر − ۳کہ/۲) (بر + ۳کہ/۲) (بر − ۵کہ/۲) (بر + ۵کہ/۲)

اسمین ا کوئی ایسی مقدار ہے جسکو بر سے کچھہ لگاؤ نہین
پس ہم فرض کر سکتے ہین کہ

جم بر = اَ (۱ − ۴بر²/کہ²) (۱ − ۴بر²/۹ کہ²) (۱ − ۴بر²/۲۵ کہ²)

اسمین اَ ایسی مقدار ہے کہ اوسکو بر سے کچھہ لگاؤ نہین اور بر = ۰ کے فرض کرنے سے اَ = ۱ تو

جم بر = (۱ − ۴بر²/کہ²) (۱ − ۴بر²/۹ کہ²) (۱ − ۴بر²/۲۵ کہ²) . . .

ان تحقیقاتوں مین جو ا اور اَ کی نسبت باتین فرض کین ہین وہ جائز نہین ہین

(۳۲۴) دفعہ ۱۶۹ مین ہم نے بیان کیا ہے کہ علم مثلثی جملون کی لوکارثمی جدولین بعوض اصلی جملون کی جدولون کے کام مین آسکتی ہین اب اس بات کو ثابت کرینگے کہ یہہ کس طرح ہو سکتا ہے ہمکو معلوم ہے

جب بر = (۱ − بر²/کہ²) (۱ − بر²/۴ کہ²) (۱ − بر²/۹ کہ²) . . .

م/ن . کہ/۲ کو بر کی جگہہ رکھو اور لوکارثم لو تو

لوک جب م/ن . کہ/۲ = لوک م/ن + لوک کہ/۲ + لوک (۱ − م²/۴ ن²) + . . .

اب آخر سطر کی رقمین بموجب دفعہ ۱۴۵ کے پہیل سکتی ہین اور وہ سب انضمامی سلسلے بہت جلدی سے ہو جائینگے اور اگر لب قالب لوکارثمی کو تعبیر کرے تو

لوک جب م/ن . کہ/۲ = لوک کہ + لوک م + لوک (۲ن + م) + لوک (۲ن − م) − ۳ (لوک ۲ + لوک ن)

− لب (۱/۴ + ۱/۱۶ + ۱/۳۶ + . .) م²/ن²

− لب/۲ (۱/۴² + ۱/۱۶² + ۱/۳۶² + . .) م⁴/ن⁴

− لب/۳ (۱/۴³ + ۱/۱۶³ + ۱/۳۶³ + . .) م⁶/ن⁶

. . . .

مثالیں

(۱) ان لاانتہا سلسلوں کا حاصل جمع دریافت کرو

(۱) $\frac{۱}{۱^{ن}} + \frac{۱}{۲^{ن}} + \frac{۱}{۳^{ن}} + \frac{۱}{۴^{ن}} + \cdots$

(۲) $\frac{۱}{۱^{ن}} + \frac{۱}{۳^{ن}} + \frac{۱}{۵^{ن}} + \frac{۱}{۷^{ن}} + \cdots$

جب ن = ۲ اور جب ن = ۴

(۲) اگر سہ = $\frac{ط}{۴ن}$ تو ثابت کرو کہ

جب سہ جب ۵سہ جب ۹سہ . . . جب (۴ن − ۳) سہ = $۲^{-ن + \frac{۱}{۲}}$

(۳) اگر دائرہ میں ایسی کثیر الاضلاع ن ضلعوں کی بنائی جائے کہ اوسکی ضلع کے محاذی زاوئی مرکز پر سہ و ۲سہ و ۳سہ . . . ن سہ ہوں تو ثابت کرو کہ اس کثیر الاضلاع کا رقبہ ن ضلعے کے منتظمہ الاضلاع کے رقبہ سے جو دائرہ کے اوپر بنائی جائی وہ نسبت رکہتا ہی جو جب $\frac{ن سہ}{۲}$ کو نسبت ن جب $\frac{سہ}{۲}$ سے رکہتا ہے

(۴) دائرہ کا نصف قطر ط ہی اوسمین ن ضلعوں کے منتظمہ الاضلاع بنائی گئی ہی اور ایک کو نے سے تمام کونوں مین خطوط ملائے گئے ہین تو ان تمام خطوں کا حاصل ضرب ن $ط^{ن-۱}$ ہوگا

(۵) ایک دائرہ ہی جسکا نصف قطر ط ہی اور اوسکی اوپر ۲ن ضلعوں کی منتظمہ الاضلاع بنی ہی اوسکے اضلاع پر دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ سے عمود ع۱ و ع۲ . . . ع۲ن−۱ اور ع۲ن کہنچے جائین تو ثابت کرو کہ

$ع_{۱}\, ع_{۳}\, ع_{۵} \cdots ع_{۲ن-۱} + ع_{۲}\, ع_{۴} \cdots ع_{۲ن} = \frac{ط^{ن}}{۲^{ن-۲}}$

(۶) دائرہ کے اندر ایک کثیر الاضلاع بنی ہوئی ہی اور اوسکے اوپر ایک کثیر الاضلاع اندر کی کثیر الاضلاع کونوں پر مس کرتی ہوئی دائرہ کو کہنچی گئی ہے دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ سے عمود جو بعض اضلاع پر کثیر الاضلاع اندرونی کے نکالی جائین اونکا حاصل ضرب برابر ہوگا اون عمودوں کے حاصل ضرب کے جو محیط کے اوسی نقطہ سے بعض اضلاع کثیر الاضلاع بیرونی پر نکالے جائین

(۷) ثابت کرو کہ جب ب ر جم ب ر/۲ = ۸ جب ب/۲ جب ا ک ہ ب ر/۴ جب ا ک ہ+ ب ر/۴

(۸) ثابت کرو کہ

(قم^۲ ب ر/۶ − قط^۲ ب ر/۲) مس ب ر/۲ = (مس ب ر/۲ قم ب ر/۶ − قط^۲ ب ر/۲) مم ب ر/۲

(۹) ثابت کرو کہ مس ۳ ب ر − مس ۲ ب ر − مس ب ر = مس ۳ ب ر مس ۲ ب ر مس ب ر

(۱۰) اس مساوات مس^۳ لا + مم^۳ لا = م^۳ − ۳ م سے لا کو دریافت کرو

(۱۱) محیط دائرہ کا ۲ن برابر حصوں میں نقاط ا و ع و ق . . . . وغیرہ میں تقسیم ہوا ہے اور نقاط ا و ع و ق . . . سے مماس نکالے گئے ہیں اور اونپر عمود ی ا اور ی ب اور ی س . . نقطہ ی طرف قطر ی ا سے نکالے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ

ی ا^۲ + ی ب^۲ + ی س^۲ + . . . = ۳ن (نصف قطر)^۲

(۱۲) ا س ب ایک ربعہ دائرہ ہی ا ع اور ا ق اور ا قوسین بہ ترتیب تصاعد عددی بلحاظ مقدار کے ہیں اور ہر ایک ا ب سے کم ہی اور اونکا مجموعہ دو چند ا ب کے برابر ہی نصف قطر س ع اور س ق اور س ر کھیچے گئے ہیں اور نقطہ ا سے جو مماس نکالا جائے اوسے نقاط عَ اور قَ اور رَ پر ملتے ہیں اور ا ع اور ا ن اور ا ر سے ایک مثلث بنتا ہی اسکی ممکن ہونے کی شرائط دریافت کرو اور ا ق کی غایت الانتہا کمی کی اور ا ع کی غایت الانتہا زیادتی کی دریافت کرو ثابت کرو کہ تمام ایسی مثلثوں میں نصف قطر دوائر اندرونی اور بیرونی کے تناسب معکوس رکھتے ہیں

(۱۳) ا ب س مثلث قائم الزاویہ ہی اور س زاویہ قائمہ ہے ب س کو دائرہ اندرونی نقطہ ی پر مس کرتا ہی اور دائرہ جو ا ب اور اضلاع ممدودہ س ا اور س ب کو مس کرتا ہوا کھیچا جائے س ا سے نقطہ ف پر ملتا ہی تو ثابت کرو کہ اگر ی ف ملایا جائے تو مثلث ف ی س نصف مثلث ا ب س کا ہے

(۱۴) ایک مثلث کی کونوں سے خطوط خارجی زاویوں کو تنصیف کرتے ہوئی کھیچے گئے ہیں اگر

رقبہ اصل مثلث کا اور ص نئی مثلث کا ہو تو ثابت کرو کہ

ص = ½ ص قم ½ قم ۖ قم ۖ

(۱۵) اب س د ایک خط افقی ہے د کے اوپر ایک مقام ہے اور اب اور ب س معلوم ہیں اون کے محاذی ایک ہی زاویہ ہے اگر اب = ط اور ب س = ص تو ثابت کرو کہ ارتفاع مشاہدہ کرنیوالے کے مقام کا د کے اوپر

$$\frac{۲ ط ص (ط + ص) مس سہ}{(ط - ص)^۲ + (ط + ص)^۲ مس^۲ سہ}$$ ہے

(۱۶) اگر ایک قوس ربعہ دائرہ سے بڑی ہو اور اوسمین ایک نقطہ مقرر کیا جاے اور اس نقطہ سے دو خطوط ایک طرف قوس ہین اور دوسرا عمود وتر پر نکالا جاے اور اوسی پر ختم ہو تو ثابت کرو کہ مجموعہ ان دو خطوں کا چھوٹا وتر قوس سے ہوگا

(۱۷) ایک بادل کا زاویہ ارتفاع سہ ہے اور ایک تالاب مین اس بادل کا عکس ٹھیک تابی اوسکا زاویہ پستی صہ ہے اور ھہ ارتفاع مشاہدہ کرنیوالی آنکھ کا تالاب پر ہے تو ارتفاع بادل کا

$$\frac{ھہ جب (صہ + سہ)}{جب (صہ - سہ)}$$ ہے

(۱۸) سطح سمندر سے ھہ فیٹ ایک ٹیلا ہے اور اوسپر دوپہر کو ایک شخص کھڑا ہوا ہے اور مشاہدہ کرتا ہے کہ زاویہ ارتفاع بادل کا نصف النہار پر سہ ہے اور اور سطح آب پر جو سایہ پڑتا ہے اوسکا زاویہ صہ ہے تو ثابت کرو کہ اگر لہ آفتاب کا ارتفاع مقام مشاہدہ پر ہو تو بادل کی بلندی سطح آب پر

$$\frac{ھہ جب لہ جب (سہ + صہ)}{جب سہ جب (لہ + سہ)}$$ ہے

اور مشاہدہ کرنیوالے کے پس پشت آفتاب ہے

اسواسطے اگر ہمکو یہہ مطلوب ہو کہ مجموعہ جوب التمام کے مجذورن کا برابر واحد کے ہو تو ایک یا زیادہ حادہ زاویون مین سے گہٹانے چاہیئے تو اونکا مجموعہ ۱۸۰° سے کم ہوگا

(۳۸) قیمت جب (ا + ب + س) جو دفعہ ۱۱۳ مین لکہی ہوئی اوس سے یہہ استخراج ہوتا ہے کہ

جب ا + جب ب + جب س − جب (ا + ب + س)

= جب ا (۱ − جم ب جم س) + جب ب (۱ − جم ا جم س) + جب س (۱ − جم ا جم ب)
+ جب ا جب ب جب س

ہر ایک رقم اس جملہ کی مثبت ہی

(۳۹) ی $\frac{ی}{۲}$ (۴۰) صفر (۴۱) وہ (۱ − جم بر)^۲ (۱ + ۲ جم بر) کے صفر سے بڑے ہونے پر موقوف ہے

بارہوان باب ۳۰۸ صفحہ (۳) مس بر = $\frac{− جب سہ ± جب بر}{جم سہ جم صہ}$

(۴) اور $\frac{۱}{۲}$ (۵) مم $\frac{بر}{۲}$ − مم بر = $\frac{۱}{جب بر}$ (۶) $\frac{۱ − ح}{۱ + ح}$

(۷) ط^۲ = ص ح (۸) ط^۲ + ص^۲ ± $\frac{ح}{جب بر}$ = ۱ (۱۱) ط + ص − ح = ۲

(۱۲) لا^۲ + ر^۲ = ط^۲ (۱ + $\frac{ح^۲}{ص^۲}$) (۱۳) مم ح = $\frac{۱}{ط}$ − $\frac{۱}{ص}$ (۱۴) $\frac{لا^۲}{ط^۲}$ + $\frac{ی^۲}{ص^۲}$ = ۱

(۱۵) ص ح = ط − ۲ ط ح جم سہر + ح^۲ (۱۹) (م ۲) $\frac{ی^۲}{ب^۲}$ [جم^۲ ا + ن $\frac{ی^۲}{ب^۲}$] = ۱

(۲۰) $\frac{لا^۲}{ص^۲}$ + $\frac{ی^۲}{ط^۲}$ = ۱

(۲۹) جب بر جب سہر = جب سہ جب صہ

اسواسطے ۴ جب^۲ $\frac{بر}{۲}$ − ۴ جب^۴ $\frac{بر}{۲}$ = $\frac{جب^۲ سہ جب^۲ صہ}{جب^۲ سہر}$

اور جب^۲ سہر = $\frac{جم^۲ \frac{بر}{۲}}{جم^۲ \frac{بر}{۲} + جم^۲ صہ}$ اسواسطے

اسواسطے ۴ جب^۲ $\frac{بر}{۲}$ − ۱ = [۱ − ۴ جب^۲ $\frac{بر}{۲}$ (جم^۲ $\frac{بر}{۲}$ + جم^۲ صہ) جب^۲ صہ]

(۳۰) ن درمیان −۲ اور −۱ یا ۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتا ہے

(۳۱) بموجب دفعہ ۱۴۱ کے لا = مس ا اور ی = مس ب اور ی = مس س اسلیے

ا + ب + س = ۱۸۰° اسواسطے ۲ ا + ۲ ب + ۲ س = ۳۶۰° اور

(۲۱) جب بر + جب سر = ۲ جب (بر + سر) اسیواسطے جم $\frac{بر - سر}{۲}$ = ۱ جم $\frac{بر + سر}{۲}$

اسیواسطے جم $\frac{بر}{۲}$ جم $\frac{سر}{۲}$ = ۳ جب $\frac{بر}{۲}$ جب $\frac{سر}{۲}$

اسیواسطے (۱ - جب^۲ $\frac{بر}{۲}$) (۱ - جب^۲ $\frac{سر}{۲}$) = ۹ جب^۲ $\frac{بر}{۲}$ جب^۲ $\frac{سر}{۲}$

اسیواسطے ۸ جب^۲ $\frac{بر}{۲}$ جب^۲ $\frac{سر}{۲}$ = ۱ - جب^۲ $\frac{بر}{۲}$ - جب^۲ $\frac{سر}{۲}$

اسیواسطے ۱۶ جب^۲ $\frac{بر}{۲}$ جب^۲ $\frac{سر}{۲}$ = ۲ - ۲ جب^۲ $\frac{بر}{۲}$ - ۲ جب^۲ $\frac{سر}{۲}$ = جم بر + جم سر

یا اسطرح جم بر = $\frac{طا^۲ + طب^۲ - طس^۲}{۲ طا طب}$ اور طب = $\frac{ط + طس}{۲}$

اسیواسطے جم بر = $\frac{طا}{طس}$ + $\frac{طب}{۲ طا}$ = $\frac{۵ طا^۲ - ۳ طس}{۴ طا}$

اور اسیطرح جم سر = $\frac{۵ طس - ۳ طا}{۴ طس}$

(۳۷) آٹھوین باب کے ۳۰ اور ۱۲ مثالون سے نکل سکتی ہین

(۴۰) ہمکو یہہ ثابت کرنا (طا + طب + طس) (طس + طا - طب) (طا + طب - طس) چھوٹا بہ نسبت طا طب طس کے ہوگا مگر طا = طب = طس کی صورت مستثنی ہی ان مقدارون کے مجذور کرنے سے ظاہر ہوتا کہ طا^۲ - (طس - طب)^۲] [طب^۲ - (طا - طس)^۲] [طس^۲ - (طا - طب)^۲]] چھوٹا بہ نسبت طا^۲ طب^۲ طس^۲ کے ہے اور دائین طرف ہر ایک جز ضربی چھوٹا ہی اپنی نظیر کے جز ضربی سے جو بائین طرف ہی

چودہوان باب ۲۶۳ صفحہ (۱) ا = ۳۰° یا ۱۵۰° (۲) ۳۰° و ۹۰°

(۳) ۴۵° و ۶۰° و ۷۵° (۴) مثلث نا ممکن ہے

(۵) ب = ۹۰° س = ۲۰° طس = ۴ $\sqrt{۵ + ۲\sqrt{۵}}$ (۶) ب = ۴۵° یا ۱۳۵°

(۷) دفعہ ۲۳۵ سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا طس + طس$'$ = ۲ طب جم ا اور طس طس$'$ = طب^۲ - طا^۲ (۸) طب^۲ جب ا جم ا

(۱۱) نہین اور مثلث قائم الزاویہ ہے (۱۲) جب سر = $\frac{۲ \sqrt{(طا طب)}}{طا + طب}$ جب $\frac{۱}{۲}$ س

اور نیز $\frac{طا + طب}{طس}$ = $\frac{جب ا + جب ب}{جب س}$ = $\frac{جم \frac{۱}{۲} (ا - ب)}{جب \frac{۱}{۲} س}$

(۳۴) ۳۱ ۴۰۰ ، ۲۹۶

سولہواں باب صفحہ ۱۸۴ (۱) ۲۱۶ (۲) ۳۵ (۱۶۳/۳ − ۱) / ۱۶۴

(۳) ۶ (۸) ۲/۷ کو جو نسبت ۳ سے اور ۱۲۰° (۲۵) ماع ق آپین ع اور ق حصے معلوم ہین

(۴۶) ۲° ۸ ، ۴۴ ۳۹ ، ۳۲ ۴۸ ، ۳۹ ۷۵ ، ۱۰ ۴۲

(۵) بالعکس اسکے اگر یہہ ارتباط قایم ہو خطوط ایک نقطہ پر ملینگے

۵۱ و ۵۲ و ۵۳ و ۵۴ پچاسوین مثال کے عکس سے نکل سکتے ہین

سترہواں باب صفحہ ۱۹۱ (۱) −۱ و ۱/۱۶ − ۳/۱۶ − ۴ و −۱/۱۶ − ۳/۱۶ − ۴

(۴) −۲ و ۲/۳ جم ۹° و ۲/۳ جم ۳۳° و ۲/۳ جم ۸۱° و ۲/۳ جم ۱۵۳°

(۷) فرض کرو کہ لا ارتفاع بیلون کا ہی اور مثلث ا ب س کے اضلاع طا و طب و طس تو

۴ طس^۲ لا^۴ − ۳۶ طا^۲ طب^۲ لا^۲ + ۹ طا^۲ طب^۲ طس^۲ = ۰

(۹) ۳ انچ سے کم (۱۲) فرض کرو کہ صہ ارتفاع برج کا اور نق نصف قطر اور ل مقام

مشاہدہ سے مرکز تک لا فاصلہ ہے تو لا/نق = قم صہ/۲

اور (لا − طا)/نق = قم صہَ/۲ و صہ = لا مس سہ اور صہَ = (لا − طا) مس سہَ

ان چار مساواتون سے لا کو دور کرو اور صہ اور نق اور نیز ارتباط سہ اور سہَ اور صہ اور صہَ

کا دریافت کرو (۱۳) سوال گذشتہ کے موافق طا/نق = قم صہ/۲ − قم صہَ/۲ اگر ہم یہہ

فرض کرین کہ غلطی صہ اور صہَ کے اندر اسقدر فر کے واقع ہوئی اور فر کی ایک ہی علامت ہی

تو ان غلطیون مین آپس مین عوض معوض ہو جاویگا اور سب سے بڑی غلطی نق کے دریافت کرنے مین

جو واقع ہوگی وہ اسطرح حاصل ہوگی کہ جو غلطیان صہ اور صہَ کے اندر واقع ہون اونکو

مخالف علامت کا مقرر کرو پس صہ کے جگہہ صہ − فر اور صہَ کے جگہہ صہَ + فر

مقرر کرو تو بموجب دفعہ ۱۹۴ کے ہمکو یہہ دریافت ہوگا کہ